Wegweiser durch das MAX PLANCK GYMNASIUM DÜSSELDORF	**Schulinternes Curriculum Sekundarstufe II** **Mathematik**

In der Sekundarstufe II wird Mathematik regelmäßig in Grund- und Leistungskursen unterrichtet.

Der Unterricht findet im 45-Minuten-Takt statt, die Kursblockung sieht grundsätzlich für Grundkurse eine, für Leistungskurse zwei Doppelstunden vor.

In der Sekundarstufe I wird ein wissenschaftlicher Taschenrechner ab Klasse 7 verwendet, dynamische Geometrie-Software und Tabellenkalkulation werden an geeigneten Stellen im Unterricht genutzt, der Umgang mit ihnen eingeübt. Dazu stehen in der Schule Tablets zur Verfügung. In der Sekundarstufe II kann deshalb davon ausgegangen werden, dass die Schülerinnen und Schüler mit den grundlegenden Möglichkeiten dieser digitalen Werkzeuge vertraut sind.

Der grafikfähige Taschenrechner wird in der Einführungsphase eingeführt. Der im Unterricht verwendete Taschenrechner ist der TI Nspire CX (letztes Schuljahr: 2022/2023).

Das Curriculum gibt lediglich einen Vorschlag über die Reihenfolge der Themen. Innerhalb eines Schuljahres sind Änderungen bezüglich dieser Reihenfolge grundsätzlich möglich.

In der Sekundarstufe II sind die folgenden Lehrwerke eingeführt:

Einführungsphase:

Lambacher Schweizer Einführungsphase. Stuttgart: Klett, 2014.

Qualifikationsphase:

Lambacher Schweizer Qualifikationsphase. Leistungskurs/Grundkurs. Stuttgart: Klett, 2015.

Einführungsphase

<table>
<tr><th colspan="3">Einführungsphase</th></tr>
<tr>
<td><u>Unterrichtsvorhaben I:</u>

Thema:
• Wiederholung der Eigenschaften linearer und quadratischer Funktionen, Grundwissen Funktionen/funktionaler Zusammenhang
• Von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate (E-A2)

Zentrale Kompetenzen:
• Argumentieren
• Werkzeuge nutzen

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
• Grundverständnis des Ableitungsbegriffs

Zeitbedarf: 18 Std.</td>
<td><u>Unterrichtsvorhaben II:</u>

Thema:
Beschreibung der Eigenschaften von Funktionen und deren Nutzung im Kontext (E-A1)

Zentrale Kompetenzen:
• Modellieren
• Werkzeuge nutzen

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
• Grundlegende Eigenschaften von Potenz-, ganzrationalen und Sinusfunktionen

Zeitbedarf: 18 Std.</td>
<td><u>Unterrichtsvorhaben III:</u>

Thema:
Entwicklung und Anwendung von Kriterien und Verfahren zur Untersuchung von Funktionen (E-A3)

Zentrale Kompetenzen:
• Problemlösen
• Argumentieren

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
• Differentialrechnung ganzrationaler Funktionen

Zeitbedarf: 12 Std.</td>
</tr>
<tr>
<td><u>Unterrichtsvorhaben IV:</u>

Thema:
Beschreibung von Wachstums- und Zerfallsprozessen (E-A4)

Zentrale Kompetenzen:
• Modellieren
• Problemlösen

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
• Exponential- und Wurzelfunktionen

Zeitbedarf: 13 Std.</td>
<td><u>Unterrichtsvorhaben V:</u>

Thema:
Den Zufall im Griff – Modellierung von Zufallsprozessen und Umgang mit bedingten Wahrscheinlichkeiten (E-S1)

Zentrale Kompetenzen:
• Modellieren
• Werkzeuge nutzen

Inhaltsfeld: Stochastik (S)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
• Mehrstufige Zufallsexperimente
• Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Zeitbedarf: 15 Std</td>
<td><u>Unterrichtsvorhaben VI:</u>

Thema:
Unterwegs in 3D – Koordinatisierungen des Raumes und Bewegungen im Raum (E-G1)

Zentrale Kompetenzen:
• Modellieren
• Kommunizieren

Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
• Koordinatisierungen des Raumes
• Vektoren und Vektoroperationen

Zeitbedarf: 8 Std.</td>
</tr>
<tr><td colspan="3"><u>Summe Einführungsphase: 84 Stunden</u></td></tr>
</table>

Von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate (E-A2)

<table>
<tr><th>Zeitraum</th><th>Inhaltsbezogene Kompetenzen</th><th>prozessbezogene Kompetenzen</th><th>Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen</th></tr>
<tr><td>2 UE</td><td>Funktionsbegriff</td><td rowspan="7">Modellieren
Mathematisieren Sachsituationen in mathematische Modelle übersetzen, mithilfe math. Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des math. Modells erarbeiten
Reflektieren die Plausibilität von Ergebnissen überprüfen
Validieren die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation beziehen,
die Angemessenheit aufgestellter Modelle für die Fragestellung reflektieren
Problemlösen
Erkunden Muster und Beziehungen erkennen
Lösen heuristische Strategien und Prinzipien nutzen,
geeignete Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren zur Problemlösung auswählen
Reflektieren die Plausibilität von Ergebnissen überprüfen
Argumentieren
Vermuten Vermutungen aufstellen
Beurteilen Ergebnisse, Begriffe und Regeln auf Verallgemeinerbarkeit überprüfen
Kommunizieren
Rezipieren Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren beschreiben,
Produzieren die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang verwenden,
flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen wechseln
Diskutieren zu mathematikhaltigen, auch fehlerbehafteten Aussagen und Darstellungen begründet Stellung nehmen

Werkzeuge nutzen
Digitale Werkzeuge nutzen zum Erkunden und Berechnen und zum Darstellen von Funktionen (graphisch und als Wertetabelle),
zielgerichteten Variieren von Parametern,
grafischen Messen von Steigungen,
Berechnen der Ableitung einer Funktion an einer Stelle</td><td rowspan="7">Für den Einstieg wird ein Stationenlernen zu durchschnittlichen Änderungsraten in unterschiedlichen Sachzusammenhängen empfohlen, die auch im weiteren Verlauf immer wieder auftauchen (z. B. Bewegungen, Zu- und Abflüsse, Höhenprofil, Temperaturmessung, Aktienkurse, Entwicklung regenerativer Energien, Sonntagsfrage, Wirk- oder Schadstoffkonzentration, Wachstum, Kosten- und Ertragsentwicklung).
Der Begriff der lokalen Änderungsrate wird im Sinne eines spiraligen Curriculums qualitativ und heuristisch verwendet.
Als Kontext für den Übergang von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate wird die vermeintliche Diskrepanz zwischen der Durchschnittsgeschwindigkeit bei einer längeren Fahrt und der durch ein Messgerät ermittelten Momentangeschwindigkeit genutzt.
Neben zeitabhängigen Vorgängen soll auch ein geometrischer Kontext betrachtet werden.
Tabellenkalkulation und Dynamische-Geometrie-Software werden zur numerischen und geometrischen Darstellung des Grenzprozesses beim Übergang von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate bzw. der Sekanten zur Tangenten (Zoomen) eingesetzt.
Im Zusammenhang mit dem graphischen Ableiten und dem Begründen der Eigenschaften eines Funktionsgraphen sollen die Schülerinnen und Schüler in besonderer Weise zum Vermuten, Begründen und Präzisieren ihrer Aussagen angehalten werden. Hier ist auch der Ort, den Begriff des Extrempunktes (lokal vs. global) zu präzisieren und dabei auch Sonderfälle, wie eine konstante Funktion, zu betrachten, während eine Untersuchung der Änderung von Änderungen erst zu einem späteren Zeitpunkt des Unterrichts (Q1) vorgesehen ist.
Für eine quadratische Funktion wird der Grenzübergang bei der „h-Methode“ exemplarisch durchgeführt.
Kontexte spielen in diesem Unterrichtsvorhaben eine untergeordnete Rolle. Quadratische Funktionen können aber stets als Weg-Zeit-Funktion bei Fall- und Wurf- und anderen gleichförmig beschleunigten Bewegungen gedeutet werden.</td></tr>
<tr><td>2 UE</td><td>durchschnittliche Änderungsraten berechnen und im Kontext interpretieren</td></tr>
<tr><td>2 UE</td><td>lokale Änderungsraten berechnen und im Kontext interpretieren,
auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs an Beispielen den Übergang von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate qualitativ erläutern,
die Tangente als Grenzlage einer Folge von Sekanten deuten,
die Ableitung an einer Stelle als lokale Änderungsrate/Tangentensteigung deuten</td></tr>
<tr><td>2 UE</td><td>die Ableitung an einer Stelle als lokale Änderungsrate/Tangentensteigung deuten</td></tr>
<tr><td>2 UE</td><td>Änderungsraten funktional beschreiben und interpretieren (Ableitungsfunktion),
Funktionen graphisch ableiten</td></tr>
<tr><td>6 UE</td><td>die Ableitungsregel für Potenzfunktionen mit natürlichem Exponenten nutzen,
die Summen- und Faktorregel auf ganzrationale Funktionen anwenden</td></tr>
<tr><td>2 UE</td><td>die Kosinusfunktion als Ableitung der Sinusfunktion nennen</td></tr>
</table>

Beschreibung der Eigenschaften von Funktionen und deren Nutzung im Kontext (E-A1)

<table>
<tr><th>Zeitraum</th><th>Inhaltsbezogene Kompetenzen</th><th>prozessbezogene Kompetenzen</th><th>Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen</th></tr>
<tr><td>4 UE</td><td>einfache Transformationen (Streckung, Verschiebung) auf Funktionen (quadratische Funktionen) anwenden und die zugehörigen Parameter deuten</td><td rowspan="5">Problemlösen
Lösen ausgewählte Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung einsetzen,
Werkzeuge auswählen, die den Lösungsweg unterstützen
Reflektieren die Plausibilität von Ergebnissen überprüfen
Argumentieren
Vermuten Vermutungen aufstellen und beispielgebunden unterstützen
Begründen vorgegeben Argumentationen und mathematische Beweise erklären
Kommunizieren
Rezipieren Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren beschreiben,
mathematische Fachbegriffe in theoretischen Zusammenhängen erläutern
Produzieren eigene Überlegungen formulieren und eigene Lösungswege beschreiben
Diskutieren zu mathematikhaltigen, auch fehlerbehafteten Aussagen und Darstellungen begründet Stellung nehmen,
ausgearbeitete Lösungen hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität beurteilen,
auf der Grundlage fachbezogener Diskussionen Entscheidungen herbeiführen
Werkzeuge nutzen
Digitale Werkzeuge nutzen zum Erkunden und zum
Darstellen von Funktionen (graphisch und als Wertetabelle),
zielgerichteten Variieren der Parameter von Funktionen,
Lösen von Gleichungen</td><td rowspan="5">Algebraische Rechentechniken werden grundsätzlich parallel vermittelt und diagnosegestützt geübt (solange in diesem Unterrichtsvorhaben erforderlich in einer von drei Wochenstunden, ergänzt durch differenzierende, individuelle Zusatzangebote aus Aufgabensammlungen). Dem oft erhöhten Angleichungs- und Förderbedarf von Schulformwechslern wird ebenfalls durch gezielte individuelle Angebote Rechnung getragen.
Hilfreich kann es sein, dabei die Kompetenzen der Mitschülerinnen und Mitschüler (z. B. durch Kurzvorträge) zu nutzen.

Ein besonderes Augenmerk muss in diesem Unterrichtsvorhaben auf die Einführung in die elementaren Bedienkompetenzen der verwendeten Software und des GTR gerichtet werden.

Anknüpfend an die Erfahrungen aus der SI werden quadratische Funktionen (Scheitelpunktform) und Parabeln unter dem Transformationsaspekt betrachtet. Systematisches Erkunden mithilfe des GTR eröffnet den Zugang zu Potenzfunktionen.

Ganzrationale Funktionen vom Grad 3 werden Gegenstand einer qualitativen Erkundung mit dem GTR, wobei Parameter gezielt variiert werden. Zusätzlich werden die Symmetrie zum Ursprung und das Globalverhalten untersucht. Die Vorteile einer Darstellung mithilfe von Linearfaktoren und die Bedeutung der Vielfachheit einer Nullstelle werden hier thematisiert.</td></tr>
<tr><td>4 UE</td><td>Eigenschaften von Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten sowie von quadratischen und kubischen Wurzelfunktionen beschreiben</td></tr>
<tr><td>2 UE</td><td>am Graphen oder Term einer Funktion ablesbare Eigenschaften als Argumente beim Lösen innermathematischer Probleme verwenden</td></tr>
<tr><td>4 UE</td><td>Polynomgleichungen, die sich durch einfaches Ausklammern oder Substituieren auf lineare oder quadratische Gleichungen zurückführen lassen, ohne Hilfsmittel lösen</td></tr>
<tr><td>4 UE</td><td>einfache Transformationen (Streckung, Verschiebung) auf Funktionen (Sinusfunktion, quadratische Funktionen, Potenzfunktionen) anwenden und die zugehörigen Parameter deuten</td></tr>
</table>

Entwicklung und Anwendung von Kriterien und Verfahren zur Untersuchung von Funktionen (E-A3)

<table>
<tr><th>Zeitraum</th><th>Inhaltsbezogene Kompetenzen</th><th>Prozessbezogene Kompetenzen</th><th>Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen</th></tr>
<tr><td>2 UE</td><td>Eigenschaften eines Funktionsgraphen beschreiben</td><td rowspan="4">Modellieren
Strukturieren Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung erfassen
Mathematisieren Sachsituationen in mathematische Modelle übersetzen, mithilfe math. Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des math. Modells erarbeiten
Validieren die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation beziehen
Problemlösen
Erkunden Muster und Beziehungen erkennen
Lösen ausgewählte Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung einsetzen,
Werkzeuge auswählen, die den Lösungsweg unterstützen,
einschränkende Bedingungen berücksichtigen
Reflektieren Ergebnisse auf dem Hintergrund der Fragestellung überprüfen,
die Plausibilität von Ergebnissen überprüfen,
verschiedene Lösungswege vergleichen
Argumentieren
Vermuten Vermutungen aufstellen und mithilfe von Fachbegriffen präzisieren
Begründen math. Regeln und Sätze für Begründungen nutzen
Kommunizieren
Rezipieren Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren beschreiben,
math. Begriffe in Sachzusammenhängen erläutern
Produzieren die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang verwenden,
Arbeitsschritte nachvollziehbar dokumentieren
Werkzeuge nutzen
Digitale Werkzeuge nutzen zum Erkunden und zum Darstellen von Funktionen (graphisch und als Wertetabelle)</td><td rowspan="4">Für ganzrationale Funktionen werden die Zusammenhänge zwischen den Extrempunkten der Ausgangsfunktion und ihrer Ableitung durch die Betrachtung von Monotonieintervallen und der vier möglichen Vorzeichenwechsel an den Nullstellen der Ableitung untersucht. Die Schülerinnen und Schüler üben damit, vorstellungsbezogen zu argumentieren. Die Untersuchungen auf Symmetrien und Globalverhalten werden fortgesetzt.

Bezüglich der Lösung von Gleichungen im Zusammenhang mit der Nullstellenbestimmung wird durch geeignete Aufgaben Gelegenheit zum Üben von Lösungsverfahren ohne Verwendung des GTR gegeben.

Der logische Unterschied zwischen notwendigen und hinreichenden Kriterien kann durch Multiple-Choice-Aufgaben vertieft werden, die rund um die Thematik der Funktionsuntersuchung von Polynomfunktionen Begründungsanlässe und die Möglichkeit der Einübung zentraler Begriffe bieten.
Neben den Fällen, in denen das Vorzeichenwechselkriterium angewendet wird, werden die Lernenden auch mit Situationen konfrontiert, in denen sie mit den Eigenschaften des Graphen oder Terms argumentieren. So erzwingt z. B. Achsensymmetrie die Existenz eines Extrempunktes auf der Symmetrieachse.

Beim Lösen von inner- und außermathematischen Problemen können auch Tangentengleichungen bestimmt werden.</td></tr>
<tr><td>2 UE</td><td>Eigenschaften von Funktionsgraphen (Monotonie) mithilfe des Graphen der Ableitungsfunktion begründen</td></tr>
<tr><td>4 UE</td><td>Eigenschaften von Funktionsgraphen (Extrempunkte) mithilfe des Graphen der Ableitungsfunktion begründen,
lokale und globale Extrema im Definitionsbereich unterscheiden,
das notwendige Kriterium und das Vorzeichenwechselkriterium zur Bestimmung von Extrempunkten verwenden</td></tr>
<tr><td>4 UE</td><td>Am Graphen oder Term einer Funktion ablesbare Eigenschaften als Argumente beim Lösen von außermathematischen Problemen verwenden</td></tr>
</table>

Beschreibung von Wachstums- und Zerfallsprozessen (E-A4)

<table>
<tr><th>Zeitraum</th><th>Inhaltsbezogene Kompetenzen</th><th>prozessbezogene Kompetenzen</th><th></th></tr>
<tr><td>3 UE</td><td>Terme mit rationalen Exponenten (auch negative Exponenten) umformen können;
Wurzeln als Potenzen mit rationalen Exponenten verstehen.</td><td rowspan="4">Modellieren
Strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung erfassen und strukturieren,
Annahmen treffen und begründet Vereinfachungen einer realen Situation vornehmen,
Mathematisieren zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle übersetzen
mithilfe math. Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des math. Modells erarbeiten,
einem mathematischen Modell verschiedene passende Sachsituationen zuordnen,
Validieren die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation beziehen,
die Angemessenheit aufgestellter Modelle für die Fragestellung reflektieren,
aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung verbessern
Problemlösen
Lösen ausgewählte Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung einsetzen,
Werkzeuge auswählen, die den Lösungsweg unterstützen
Reflektieren Ergebnisse auf dem Hintergrund der Fragestellung und auf Plausibilität überprüfen,
verschiedene Lösungswege vergleichen
Argumentieren
Vermuten Vermutungen aufstellen und mithilfe von Fachbegriffen präzisieren
Begründen vorgegebene Argumentationen und Beweise erklären,
Kommunizieren
Diskutieren zu mathematikhaltigen, auch fehlerbehafteten Aussagen begründet Stellung nehmen
Werkzeuge nutzen
Digitale Werkzeuge nutzen zum
Darstellen von Funktionen (grafisch und als Wertetabelle),
zielgerichteten Variieren der Parameter von Funktionen,
und zum Lösen von Gleichungen</td><td rowspan="4">Der Begriff der Wurzel als Potenz mit rationalem Exponenten kann ausgehend von den Potenzgesetzen entwickelt werden.

Als Kontext für die Beschäftigung mit Wachstumsprozessen können zunächst Ansparmodelle (insbesondere lineare und exponentielle) betrachtet und mithilfe einer Tabellenkalkulation verglichen werden. Für kontinuierliche Prozesse und den Übergang zu Exponentialfunktionen werden verschiedene Kontexte (z. B. Bakterienwachstum, Abkühlung) untersucht.

Es bietet sich an, die Bedeutung der Parameter für den Funktionsgraphen sowie die Auswirkung der Variation dieser Parameter mithilfe von DGS bzw GTR entdecken zu lassen.</td></tr>
<tr><td>2 UE</td><td>Wachstumsprozesse mithilfe linearer Funktionen und Exponentialfunktionen beschreiben;
am Graphen oder Term einer Funktion ablesbare Eigenschaften als Argumente beim Lösen von inner- und außermathematischen Problemen verwenden</td></tr>
<tr><td>4 UE</td><td>Einfache Transformationen (Streckung, Verschiebung) auf Exponentialfunktionen anwenden und die zugehörigen Parameter deuten</td></tr>
<tr><td>4 UE</td><td>Exponentialgleichungen mit Hilfe des Logarithmus lösen; Potenz- und Logarithmusgesetze anwenden</td></tr>
</table>

Den Zufall im Griff – Modellierung von Zufallsprozessen und bedingten Wahrscheinlichkeiten (E-S1)

<table>
<tr><th>Zeitraum</th><th>Inhaltsbezogene Kompetenzen</th><th>Prozessbezogene Kompetenzen</th><th>Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen</th></tr>
<tr><td>3 UE</td><td>Alltagssituationen als Zufallsexperimente deuten,
Zufallsexperimente simulieren,
Wahrscheinlichkeitsverteilungen aufstellen und Erwartungswertbetrachtungen durchführen</td><td rowspan="5">Modellieren
Strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung erfassen und strukturieren,
Annahmen treffen und begründet Vereinfachungen einer realen Situation vornehmen,
Mathematisieren zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle übersetzen,
mithilfe math. Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des math. Modells erarbeiten,
einem mathematischen Modell verschiedene passende Sachsituationen zuordnen,
Validieren die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation beziehen
Problemlösen
Erkunden Fragen zu einer gegebenen Problemsituation finden und stellen, die Situation analysieren und strukturieren,
Lösen ausgewählte Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung einsetzen,
Werkzeuge auswählen, die den Lösungsweg unterstützen
Reflektieren Ergebnisse auf dem Hintergrund der Fragestellung und auf Plausibilität überprüfen,
verschiedene Lösungswege vergleichen
Argumentieren
Vermuten Vermutungen aufstellen und mithilfe von Fachbegriffen präzisieren
Begründen math. Regeln und Sätze für Begründungen nutzen
Kommunizieren
Rezipieren Informationen aus mathematikhaltigen Texten und Darstellungen erfassen, strukturieren und formalisieren
Werkzeuge nutzen
Digitale Werkzeuge nutzen zum
Generieren von Zufallszahlen;
Ermitteln von Kennzahlen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen (Erwartungswert)
und zum Erstellen von Histogrammen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen</td><td rowspan="5">Zur Modellierung von Wirklichkeit werden durchgängig Simulationen – auch unter Verwendung von digitalen Werkzeugen (GTR, Tabellenkalkulation) – geplant und durchgeführt (Zufallsgenerator).
Das Urnenmodell wird auch verwendet, um grundlegende Zählprinzipien wie das Ziehen mit/ohne Zurücklegen mit/ohne Berücksichtigung der Reihenfolge zu thematisieren.
Die zentralen Begriffe Wahrscheinlichkeitsverteilung und Erwartungswert werden im Kontext von Glücksspielen erarbeitet und können durch zunehmende Komplexität der Spielsituationen vertieft werden.
Digitale Werkzeuge werden zur Visualisierung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen (Histogramme) und zur Entlastung von händischem Rechnen verwendet.
Als Einstiegskontext zur Erarbeitung des fachlichen Inhaltes könnte das HIV-Testverfahren dienen, eine Möglichkeit zur Vertiefung böte dann die Betrachtung eines Diagnosetests zu einer häufiger auftretenden Erkrankung (z. B. Grippe).
Um die Übertragbarkeit des Verfahrens zu sichern, sollen insgesamt mindestens zwei Beispiele aus unterschiedlichen Kontexten betrachtet werden.
Zur Förderung des Verständnisses der Wahrscheinlichkeitsaussagen werden parallel Darstellungen mit absoluten Häufigkeiten verwendet.
Die Schülerinnen und Schüler sollen zwischen verschiedenen Darstellungsformen (Baumdiagramm, Mehrfeldertafel) wechseln können und diese zur Berechnung bedingter Wahrscheinlichkeiten beim Vertauschen von Merkmal und Bedingung und zum Rückschluss auf unbekannte Astwahrscheinlichkeiten nutzen können.
Bei der Erfassung stochastischer Zusammenhänge ist die Unterscheidung von Wahrscheinlichkeiten des Typs $P(A \cap B)$ von bedingten Wahrscheinlichkeiten – auch sprachlich – von besonderer Bedeutung.</td></tr>
<tr><td>3 UE</td><td>Sachverhalte mithilfe von Baumdiagrammen modellieren,
Mehrstufige Zufallsexperimente beschreiben und mithilfe der Pfadregeln Wahrscheinlichkeiten ermitteln</td></tr>
<tr><td>3 UE</td><td>Urnenmodelle zur Beschreibung von Zufallsprozessen verwenden,
Sachverhalte mithilfe von Baumdiagrammen und Vier- oder Mehrfeldertafeln modellieren,
bedingte Wahrscheinlichkeiten bestimmen,
Problemstellungen im Kontext bedingter Wahrscheinlichkeiten bearbeiten</td></tr>
<tr><td>3 UE</td><td>Teilvorgänge mehrstufiger Zufallsexperimente auf stochastische Unabhängigkeit prüfen,
Problemstellungen im Kontext bedingter Wahrscheinlichkeiten bearbeiten</td></tr>
<tr><td>3 UE</td><td>Problemstellungen im Kontext bedingter Wahrscheinlichkeiten bearbeiten</td></tr>
</table>

Unterwegs in 3D – Koordinatisierungen des Raumes und Bewegungen im Raum (E-G1)

Zeitraum	Inhaltsbezogene Kompetenzen	prozessbezogene Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
2 UE	Geeignete kartesische Koordinatisierungen für die Bearbeitung eines geometrischen Sachverhaltes in der Ebene und im Raum wählen, geometrische Objekte in einem räumlichen kartesischen Koordinatensystem darstellen	**Modellieren** *Mathematisieren* Sachsituationen in mathematische Modelle übersetzen, mithilfe math. Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des math. Modells erarbeiten *Validieren* die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation beziehen **Problemlösen** *Erkunden* Muster und Beziehungen erkennen *Lösen* Werkzeuge auswählen, die den Lösungsweg unterstützen, geeignete Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren zur Problemlösung auswählen **Argumentieren** *Vermuten* Vermutungen aufstellen, beispielgebunden unterstützen und mithilfe von Fachbegriffen präzisieren, *Begründen* Zusammenhänge zwischen Ober- und Unterbegriffen herstellen, math. Regeln und Sätze für Begründungen nutzen sowie Argumente zu Argumentationsketten verknüpfen, verschiedene Argumentationsstrategien nutzen, *Beurteilen* lückenhafte und fehlerhafte Argumentationsketten erkennen und ergänzen bzw. korrigieren, **Kommunizieren** *Rezipieren* math. Begriffe in Sachzusammenhängen erläutern, *Produzieren* eigene Überlegungen formulieren und eigene Lösungswege beschreiben, Fachsprache und fachspezifische Notation verwenden, *Diskutieren* zu mathematikhaltigen, auch fehlerbehafteten Aussagen und Darstellungen begründet Stellung nehmen **Werkzeuge nutzen** Digitale Werkzeuge nutzen zum Darstellen von Objekten im Raum; grafischen Darstellen von Ortsvektoren und Vektorsummen, Durchführen von Operationen mit Vektoren	Ausgangspunkt ist eine Vergewisserung (z. B. in Form einer Mindmap) hinsichtlich der den Schülerinnen und Schülern bereits bekannten Koordinatisierungen (GPS, geographische Koordinaten, kartesische Koordinaten, Robotersteuerung). *Die Auswahl zwischen kartesischen und anderen Koordinaten kann bei genügend zur Verfügung stehender Zeit im Kontext der Spidercam getroffen werden: Bewegung der Spidercam in einem kartesischen Koordinatensystem, Ausrichtung der Kamera in Kugelkoordinaten.* Mithilfe einer DGS werden unterschiedliche Möglichkeiten ein Schrägbild zu zeichnen untersucht und hinsichtlich ihrer Wirkung beurteilt. *Neben anderen Kontexten kann auch hier die Spidercam verwendet werden, und zwar um Kräfte und ihre Addition in Anlehnung an die Kenntnisse aus dem Physikunterricht der SI als Beispiel für vektorielle Größen zu nutzen.* Durch Operieren mit Verschiebungspfeilen werden einfache geometrische Problemstellungen gelöst: Beschreibung von Diagonalen (insbesondere zur Charakterisierung von Viereckstypen), Auffinden von Mittelpunkten (ggf. auch Schwerpunkten), Untersuchung auf Parallelität.
2 UE	Vektoren (in Koordinatendarstellung) als Verschiebungen deuten und Punkte im Raum durch Ortsvektoren kennzeichnen		
1 UE	Vektoren addieren, mit einem Skalar multiplizieren und Vektoren auf Kollinearität untersuchen		
1 UE	Längen von Vektoren und Abstände zwischen Punkten mithilfe des Satzes des Pythagoras berechnen, gerichtete Größen (Geschwindigkeit und Kraft) durch Vektoren darstellen		
1 UE	Eigenschaften von besonderen Dreiecken und Vierecken mithilfe von Vektoren nachweisen, Geeignete kartesische Koordinatisierungen für die Bearbeitung eines geometrischen Sachverhaltes in der Ebene und im Raum wählen, geometrische Objekte in einem räumlichen kartesischen Koordinatensystem darstellen		
1 UE	Gerichtete Größen (Geschwindigkeit und Beschleunigung) durch Vektoren darstellen		

Grundkurs

<table>
<tr><th colspan="3">Qualifikationsphase Grundkurs</th></tr>
<tr>
<td><u>Unterrichtsvorhaben I:</u>

Thema:
Eigenschaften von Funktionen (Höhere Ableitungen, Besondere Punkte von Funktionsgraphen, Funktionen bestimmen, Extremwertaufgaben, Parameter) (Q-GK-A1)

Zentrale Kompetenzen:
• Modellieren, Problemlösen
• Werkzeuge nutzen

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
• Fortführung der Differentialrechnung
• Funktionen als mathematische Modelle

Zeitbedarf: GK 29 Std</td>
<td><u>Unterrichtsvorhaben II:</u>

Thema:
Das Integral, ein Schlüsselkonzept (Von der Änderungsrate zum Bestand, Integral- und Flächeninhalt, Integralfunktion) (QGK-A2)

Zentrale Kompetenzen:
• Kommunizieren, Argumentieren
• Werkzeuge nutzen

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:
• Grundverständnis des Integralbegriffs
• Integralrechnung

Zeitbedarf: GK: 21 Std</td>
<td><u>Unterrichtsvorhaben III:</u>

Thema:
Exponentialfunktion (natürlicher Logarithmus, Ableitungen) (Q-GK-A3)

Zentrale Kompetenzen:
Modellieren
• Problemlösen
• Werkzeuge nutzen

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
• Fortführung der Differentialrechnung

Zeitbedarf: GK: 15 Std</td>
</tr>
<tr>
<td><u>Unterrichtsvorhaben IV:</u>

Thema: Untersuchung zusammengesetzter Funktionen (Produktregel, Kettenregel) (Q-GK-A4)

Zentrale Kompetenzen:
• Argumentieren
• Modellieren, Problemlösen
• Werkzeuge nutzen

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:
• Funktionen als mathematische Modelle
• Fortführung der Differentialrechnung
• Integralrechnung

Zeitbedarf: GK: 16 Std.</td>
<td><u>Unterrichtsvorhaben V:</u>

Thema:
Geraden und Skalarprodukt (Bewegungen und Schattenwurf) (Q-GK-G1)

Zentrale Kompetenzen:
• Problemlösen
• Modellieren

Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
• Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte (Geraden)
• Skalarprodukt

Zeitbedarf: GK : 20 Std.</td>
<td><u>Unterrichtsvorhaben VI:</u>

Thema:
Ebenen als Lösungsmengen linearer Gleichungen (Untersuchung geometrischer Objekte) (Q-GK-G2)

Zentrale Kompetenzen:
• Kommunizieren
• Argumentieren
• Werkzeuge nutzen

Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
• Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte
• Lineare Gleichungssysteme

Zeitbedarf: GK: 18 Std</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td><u>Unterrichtsvorhaben VII:</u>

Thema:
Wahrscheinlichkeit – Statistik: Ein Schlüsselkonzept (Q-GK-S1)

Zentrale Kompetenzen:
• Modellieren
• Werkzeuge nutzen
• Problemlösen

Inhaltsfeld: Stochastik (S)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
• Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen
• Binomialverteilung

Zeitbedarf: GK: 22 Std</td>
<td><u>Unterrichtsvorhaben VIII:</u>

Thema:
Von Übergängen und Prozessen (Q-GK-S2)

Zentrale Kompetenzen:
• Modellieren
• Argumentieren

Inhaltsfeld: Stochastik (S)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
• Stochastische Prozesse

Zeitbedarf: GK: 12 Std</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3"><u>Summe Qualifikationsphase Grundkurs : 153 Stunden</u></td>
</tr>
</table>

Eigenschaften von Funktionen (Höhere Ableitungen, Besondere Punkte von Funktionsgraphen, Funktionen bestimmen, Parameter) (Q-GK-A1)

Zeitraum	Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
4 UE	Wiederholung der Grundlagen der Differentialrechnung	**Modellieren** *Strukturieren*: Annahmen treffen und begründet Vereinfachungen einer realen Situation vornehmen, zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle übersetzen, *Mathematisieren*: mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells erarbeiten, die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation beziehen *Validieren*: die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung beurteilen. **Problemlösen** *Erkunden*: Fragen zu einer gegebenen Problemsituation finden und stellen einfache und komplexe mathematische Probleme, analysieren und strukturieren die Problemsituation erkennen und formulieren, Ideen für mögliche Lösungswege entwickeln, *Lösen*: ausgewählte Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung einsetzen, einschränkende Bedingungen berücksichtigen einen Lösungsplan zielgerichtet ausführen **Argumentieren** *Begründen*: mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen nutzen, vermehrt logische Strukturen berücksichtigen (notwendige / hinreichende Bedingung, Folgerungen / Äquivalenz, Und- / Oder- Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen), **Werkzeuge nutzen** Digitale Werkzeuge nutzen zum Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen Darstellen von Funktionen (grafisch und als Wertetabelle), zielgerichteten Variieren der Parameter von Funktionen, grafischen Messen von Steigungen Berechnen der Ableitung einer Funktion an einer Stelle	Das Aufstellen von Funktionsgleichungen fördert Problemlösestrategien. *Es wird deshalb empfohlen, den Lernenden hinreichend Zeit zu geben, u. a. mit Methoden des kooperativen Lernens selbstständig zu Zielfunktionen zu kommen.* An Problemen, die auf quadratische Zielfunktionen führen, sollten auch unterschiedliche Lösungswege aufgezeigt und verglichen werden. Hier bietet es sich außerdem an, Lösungsverfahren auch ohne digitale Hilfsmittel einzuüben. An mindestens einem Problem entdecken die Schülerinnen und Schüler die Notwendigkeit, Randextrema zu betrachten (z. B. „Glasscheibe“ oder verschiedene Varianten des „Hühnerhofs“). Ein Verpackungsproblem (Dose oder Milchtüte) wird unter dem Aspekt der Modellvalidierung/Modellkritik untersucht. Abschließend empfiehlt es sich, ein Problem zu behandeln, das die Schülerinnen und Schüler nur durch systematisches Probieren oder anhand des Funktionsgraphen lösen können: Aufgabe zum „schnellsten Weg“. Stellen extremaler Steigung eines Funktionsgraphen werden im Rahmen geeigneter Kontexte (z. B. Neuverschuldung und Schulden oder Besucherströme in einen Freizeitpark/zu einer Messe und erforderlicher Personaleinsatz) thematisiert und dabei der zweiten Ableitung eine anschauliche Bedeutung als Zu- und Abnahmerate der Änderungsrate der Funktion verliehen. Die Bestimmung der extremalen Steigung erfolgt zunächst über das Vorzeichenwechselkriterium (an den Nullstellen der zweiten Ableitung). Anknüpfend an die Einführungsphase (vgl. Thema E-A1) werden in unterschiedlichen Kontexten (z. B. Fotos von Brücken, Gebäuden, Flugbahnen) die Parameter der Scheitelpunktform einer quadratischen Funktion angepasst. Die Beschreibung von Links- und Rechtskurven über die Zu- und Abnahme der Steigung führt zu einer geometrischen Deutung der zweiten Ableitung einer Funktion als „Krümmung“ des Graphen und zur Betrachtung von Wendepunkten. Als Kontext hierzu können z. B. Trassierungsprobleme gewählt werden. Die simultane Betrachtung beider Ableitungen führt zur Entdeckung eines weiteren hinreichenden Kriteriums für Extrempunkte. Anhand einer Funktion mit Sattelpunkt wird die Grenze dieses hinreichenden Kriteriums entdeckt. Vor- und Nachteile der beiden hinreichenden Kriterien werden abschließend von den Lernenden kritisch bewertet. Im Zusammenhang mit unterschiedlichen Kontexten werden aus gegebenen Eigenschaften (Punkten, Symmetrieüberlegungen, Bedingungen an die 1. und
4 UE	das Krümmungsverhalten des Graphen einer Funktion mit Hilfe der 2. Ableitung beschreiben		
3 UE **3 UE**	notwendige Kriterien und Vorzeichenwechselkriterien sowie weitere hinreichende Kriterien zur Bestimmung von Extrem- und Wendepunkten verwenden		
4 UE	Extremalprobleme durch Kombination mit Nebenbedingungen auf Funktionen einer Variablen zurückführen und diese lösen		
3 UE	Parameter einer Funktion mithilfe von Bedingungen, die sich aus dem Kontext ergeben, bestimmen („Steckbriefaufgaben“)		
3 UE	Parameter von Funktionen im Anwendungszusammenhang interpretieren		
5 UE	Parameter von Funktionen im Kontext interpretieren und ihren Einfluss auf Eigenschaften von Funktionenscharen untersuchen		

			2. Ableitung) Gleichungssysteme für die Parameter ganzrationaler Funktionen entwickelt. Schülerinnen und Schüler erhalten Gelegenheit, über Grundannahmen der Modellierung (Grad der Funktion, Symmetrie, Lage im Koordinatensystem, Ausschnitt) selbst zu entscheiden, deren Angemessenheit zu reflektieren und ggf. Veränderungen vorzunehmen. *Damit nicht bereits zu Beginn algebraische Schwierigkeiten den zentralen Aspekt der Modellierung überlagern, wird empfohlen, den GTR zunächst als Blackbox zum Lösen von Gleichungssystemen und zur graphischen Darstellung der erhaltenen Funktionen im Zusammenhang mit der Validierung zu verwenden und erst im Anschluss die Blackbox „Gleichungslöser“ zu öffnen, das Gaußverfahren zu thematisieren und für einige gut überschaubare Systeme mit drei Unbekannten auch ohne digitale Werkzeuge durchzuführen.* Über freie Parameter (aus unterbestimmten Gleichungssystemen) werden Lösungsscharen erzeugt und deren Elemente hinsichtlich ihrer Eignung für das Modellierungsproblem untersucht und beurteilt. An innermathematischen „Steckbriefen“ werden Fragen der Eindeutigkeit der Modellierung und der Einfluss von Parametern auf den Funktionsgraphen untersucht.

Das Integral, ein Schlüsselkonzept (Von der Änderungsrate zum Bestand, Integral- und Flächeninhalt, Integralfunktion) (Q-GK-A2)

<table>
<tr><th>Zeitraum</th><th>Inhaltsbezogene Kompetenzen</th><th>Prozessbezogene Kompetenzen</th><th>Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen</th></tr>
<tr><td>3 UE</td><td>Produktsummen im Kontext als Rekonstruktion des Gesamtbestandes oder Gesamteffektes einer Größe interpretieren,
die Inhalte von orientierten Flächen im Kontext deuten,
zu einer gegebenen Randfunktion die zugehörige Flächeninhaltsfunktion skizzieren</td><td rowspan="5">Argumentieren
Vermuten
Vermutungen aufstellen,
Vermutungen beispielgebunden unterstützen,
Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur präzisieren,
Begründen
Zusammenhänge zwischen Begriffen herstellen (Ober- / Unterbegriff)
vorgegebene Argumentationen und mathematische Beweise erklären

Kommunizieren
Rezipieren
Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen Texten und Darstellungen, aus authentischen Texten, mathematischen Fachtexten sowie aus Unterrichtsbeiträgen erfassen, strukturieren und formalisieren,
Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren beschreiben,
mathematische Begriffe in theoretischen und in Sachzusammenhängen erläutern. eigene Überlegungen formulieren und eigene Lösungswege beschreiben,
Produzieren
begründet eine geeignete Darstellungsform auswählen,
flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen wechseln,
Arbeitsschritte nachvollziehbar dokumentieren,
Ausarbeitungen erstellen und präsentieren

Werkzeuge nutzen
Digitale Werkzeuge nutzen zum Messen von Flächeninhalten zwischen Funktionsgraph und Abszisse,
Ermitteln des Wertes eines bestimmten Integrales,
mathematische Hilfsmittel und digitale Werkzeuge zum Erkunden und
Recherchieren, Berechnen und Darstellen nutzen,</td><td rowspan="5">Damit nicht bereits zu Beginn algebraische Schwierigkeiten den zentralen Aspekt der Modellierung überlagern, wird empfohlen, den GTR zunächst als Blackbox zum Lösen von Gleichungssystemen und zur graphischen Darstellung der erhaltenen Funktionen im Zusammenhang mit der Validierung zu verwenden und erst im Anschluss die Blackbox „Gleichungslöser“ zu öffnen, das Gaußverfahren zu thematisieren und für einige gut überschaubare Systeme mit drei Unbekannten auch ohne digitale Werkzeuge durchzuführen.
Schülerinnen und Schüler sollen hier (wieder-)entdecken, dass die Bestandsfunktion eine Stammfunktion der Änderungsrate ist. Dazu kann das im vorhergehenden Unterrichtsvorhaben (vgl. Thema QGK-A3) entwickelte numerische Näherungsverfahren auf den Fall angewendet werden, dass für die Änderungsrate ein Funktionsterm gegeben ist.
Die Graphen der Änderungsrate und der Bestandsfunktion können die Schülerinnen und Schüler mit Hilfe einer Tabellenkalkulation und eines Funktionenplotters gewinnen, vergleichen und Beziehungen zwischen diesen herstellen.
Fragen, wie die Genauigkeit der Näherung erhöht werden kann, geben Anlass zu anschaulichen Grenzwertüberlegungen.
Da der Rekonstruktionsprozess auch bei einer abstrakt gegebenen Randfunktion möglich ist, wird für Bestandsfunktionen der Fachbegriff Integralfunktion eingeführt und der Zusammenhang zwischen Rand- und Integralfunktion im Hauptsatz formuliert (ggf. auch im Lehrervortrag).

Die Regeln zur Bildung von Stammfunktionen werden von den Schülerinnen und Schülern durch Rückwärtsanwenden der bekannten Ableitungsregeln selbstständig erarbeitet. (z. B. durch ein sog. Funktionendomino)

In den Anwendungen steht mit dem Hauptsatz neben dem numerischen Verfahren ein alternativer Lösungsweg zur Berechnung von Gesamtbeständen zur Verfügung.
Davon abgegrenzt wird die Berechnung von Flächeninhalten, bei der auch Intervalladditivität und Linearität (bei der Berechnung von Flächen zwischen Kurven) thematisiert werden. Bei der Berechnung der Flächeninhalte zwischen Graphen werden die Schnittstellen in der Regel numerisch mit dem GTR bestimmt.</td></tr>
<tr><td>3 UE</td><td>an geeigneten Beispielen den Übergang von der Produktsumme zum Integral auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs erläutern und vollziehen</td></tr>
<tr><td>4 UE</td><td>geometrisch-anschaulich den Zusammenhang zwischen Änderungsrate und Integralfunktion erläutern
den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung unter Verwendung eines anschaulichen Stetigkeitsbegriffs begründen</td></tr>
<tr><td>3 UE</td><td>Stammfunktionen ganzrationaler Funktionen bestimmen,
die Intervalladditivität und Linearität von Integralen nutzen</td></tr>
<tr><td>4 UE</td><td>den Gesamtbestand oder Gesamteffekt einer Größe aus der Änderungsrate ermitteln,
Flächeninhalte mit Hilfe von bestimmten Integralen ermitteln
Integrale mithilfe von gegebenen Stammfunktionen und numerisch bestimmen</td></tr>
</table>

Exponentialfunktion (natürlicher Logarithmus, Ableitungen) (Q-GK-A3)

Zeitraum	Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
3 UE	Eigenschaften von Exponentialfunktionen beschreiben	**Modellieren** *Strukturieren* *Validieren* Annahmen treffen und begründet Vereinfachungen einer realen Situation vornehmen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation beziehen, die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung beurteilen, aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung verbessern, die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen reflektieren **Problemlösen** *Erkunden* *Lösen* Muster und Beziehungen erkennen, Informationen recherchieren *ausgewählte Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung einsetzen,* *Werkzeuge auswählen, die den Lösungsweg unterstützen,* *geeignete Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren zur Problemlösung auswählen* einschränkende Bedingungen berücksichtigen **Argumentieren** *Vermuten* *Begründen* *Beurteilen* Vermutungen aufstellen und mithilfe von Fachbegriffen präzisieren math. Regeln und Sätze für Begründungen nutzen überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können, Argumentationsketten hinsichtlich ihrer Reichweite und Übertragbarkeit beurteilen **Werkzeuge nutzen** *Digitale Werkzeuge nutzen zum* Erkunden Darstellen von Funktionen (graphisch und als Wertetabelle), grafischen Messen von Steigungen, Berechnen der Ableitung einer Funktion an einer Stelle und Grenzen mathematischer Hilfsmittel und digitaler ieren und begründen	*Zu Beginn des Unterrichtsvorhabens sollte eine Auffrischung der bereits in der Einführungsphase erworbenen Kompetenzen durch eine arbeitsteilige Untersuchung verschiedener Kontexte z. B. in Gruppenarbeit mit Präsentation stehen (Wachstum und Zerfall).* Im Anschluss werden die Eigenschaften einer allgemeinen Exponentialfunktion zusammengestellt. Der GTR unterstützt dabei die Klärung der Bedeutung der verschiedenen Parameter und die Veränderungen durch Transformationen. Die Frage nach der Ableitung an einer Stelle führt zu einer vertiefenden Betrachtung des Übergangs von der durchschnittlichen zur momentanen Änderungsrate. In einem Tabellenkalkulationsblatt wird für immer kleinere h das Verhalten des Differenzenquotienten beobachtet. Umgekehrt suchen die Lernenden zu einem gegebenen Ableitungswert die zugehörige Stelle. *Dazu könnten sie eine Wertetabelle des Differenzenquotienten aufstellen, die sie immer weiter verfeinern oder in der Grafik ihres GTR experimentieren, indem sie Tangenten an verschiedenen Stellen an die Funktion legen. Mit diesem Ansatz kann in einem DGS auch der Graph der Ableitungsfunktion als Ortskurve gewonnen werden.* Abschließend wird noch die Basis variiert. Dabei ergibt sich quasi automatisch die Frage, für welche Basis Funktion und Ableitungsfunktion übereinstimmen.
4 UE	die Ableitung der natürlichen Exponentialfunktion bilden die besondere Eigenschaft der natürlichen Exponentialfunktion beschreiben		
4 UE	die Ableitung von Exponentialfunktionen mit beliebiger Basis bilden in einfachen Fällen zusammengesetzte Funktionen und deren Ableitung bilden		
4 UE	Wachstums- und Zerfallsvorgänge mit Hilfe funktionaler Ansätze untersuchen		

Untersuchung zusammengesetzter Funktionen (Produktregel, Kettenregel) (Q-GK-A4)

Zeitraum	Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
2 UE	in einfachen Fällen zusammengesetzte Funktionen bilden (Summe, Produkt, Verkettung)	**Problemlösen** *Lösen* heuristische Strategien und Prinzipien nutzen, Werkzeuge auswählen, die den Lösungsweg unterstützen, geeignete Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren zur Problemlösung auswählen **Argumentieren** *Vermuten* Vermutungen aufstellen, beispielgebunden unterstützen und mithilfe von Fachbegriffen präzisieren, *Begründen* math. Regeln und Sätze für Begründungen nutzen sowie Argumente zu Argumentationsketten verknüpfen, *Beurteilen* verschiedene Argumentationsstrategien nutzen lückenhafte Argumentationsketten erkennen und vervollständigen, fehlerhafte Argumentationsketten erkennen und korrigieren **Kommunizieren** *Produzieren* eigene Überlegungen formulieren und eigene Lösungswege beschreiben, Fachsprache und fachspezifische Notation verwenden, **Werkzeuge nutzen** Digitale Werkzeug nutzen zum zielgerichteten Variieren der Parameter von Funktionen, grafischen Messen von Steigungen Berechnen der Ableitung einer Funktion an einer Stelle Grenzen mathematischer Hilfsmittel und digitaler ieren und begründen.	Als Beispiel für eine Summenfunktion eignet sich die Modellierung einer Kettenlinie. An mindestens einem Beispiel wird auch ein beschränktes Wachstum untersucht. An Beispielen von Prozessen, bei denen das Wachstum erst zu- und dann wieder abnimmt (Medikamente, Fieber, Pflanzen), wird eine Modellierung durch Produkte von ganzrationalen Funktionen und Exponentialfunktionen einschließlich deren Verhalten für betragsgroße Argumente erarbeitet. Auch in diesen Kontexten ergeben sich Fragen, die erfordern, dass aus der Wachstumsgeschwindigkeit auf den Gesamteffekt geschlossen wird. Weitere Kontexte bieten Anlass zu komplexen Modellierungen mit Funktionen anderer Funktionenklassen, insbesondere unter Berücksichtigung von Parametern, für die Einschränkungen des Definitionsbereiches oder Fallunterscheidungen vorgenommen werden müssen. Besondere Aufmerksamkeit verdient die Goldene Marfilius-Platinumregel, die so auch von allen SuS notiert werden sollte: „Nach dem Ableiten einer zusammengesetzten Exponentialfunktion musst du den e-Term direkt wieder ausklammern. Sonst stehst du dumm da.“ Das hat auch einen ernsten Hintergrund. Vernetzungsmöglichkeiten mit der Stochastik sollten aufgegriffen werden (z. B. Gaußsche Glockenkurve – sofern zu diesem Zeitpunkt bereits behandelt).
3 UE	die Produktregel auf Verknüpfungen von ganzrationalen Funktionen und Exponentialfunktionen anwenden die Produktregel zum Ableiten von Funktionen anwenden		
4 UE	die Kettenregel auf Verknüpfungen der natürlichen Exponentialfunktion mit linearen Funktionen anwenden, die Ableitungen von Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten bilden		
4 UE	verwenden notwendige Kriterien und Vorzeichenwechselkriterien sowie weitere hinreichende Kriterien zur Bestimmung von Extrem- und Wendepunkten		
3 UE	Parameter von Funktionen im Kontext interpretieren		

Geraden und Skalarprodukt (Bewegungen als Schattenwurf) (Q-GK-G1)

Zeitraum	Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen		Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
5 UE	Wiederholung: Punkte im Raum, Vektoren, Rechnen mit Vektoren	**Modellieren** *Strukturieren* *Mathematisieren* *Validieren* **Werkzeuge nutzen** *Digitale Werkzeuge nutzen zum*	zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung erfassen und strukturieren, Annahmen treffen und begründet Vereinfachungen einer realen Situation vornehmen, zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle übersetzen, mithilfe math. Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des math. Modells erarbeiten, die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation beziehen, die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung beurteilen, aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung verbessern metrische Modelle und dynamische Geometrie-Software nutzen; grafischen Darstellen von Ortsvektoren, Vektorsummen und Geraden, Darstellen von Objekten im Raum	Lineare Bewegungen werden z. B. im Kontext von Flugbahnen (Kondensstreifen) durch Startpunkt, Zeitparameter und Geschwindigkeitsvektor beschrieben und dynamisch mit DGS dargestellt. Dabei sollten Modellierungsfragen (reale Geschwindigkeiten, Größe der Flugobjekte, Flugebenen) einbezogen werden. *Eine Vertiefung kann darin bestehen, den Betrag der Geschwindigkeit zu variieren. In jedem Fall soll der Unterschied zwischen einer Geraden als Punktmenge (z. B. die Flugbahn) und einer Parametrisierung dieser Punktmenge als Funktion (von der Parametermenge in den Raum) herausgearbeitet werden.* Ergänzend zum dynamischen Zugang wird die rein geometrische Frage aufgeworfen, wie eine Gerade durch zwei Punkte zu beschreiben ist. Hierbei wird herausgearbeitet, dass zwischen unterschiedlichen Parametrisierungen einer Geraden gewechselt werden kann. Punktproben sowie die Berechnung von Schnittpunkten mit den Grundebenen sollen auch hilfsmittelfrei durchgeführt werden. Die Darstellung in räumlichen Koordinatensystemen sollte hinreichend geübt werden. Auf dieser Grundlage können z. B. Schattenwürfe von Gebäuden in Parallel- und Zentralprojektion auf eine der Grundebenen berechnet und zeichnerisch dargestellt werden. Der Einsatz der DGS bietet hier die zusätzliche Möglichkeit, dass der Ort der Strahlenquelle variiert werden kann. Inhaltlich schließt die Behandlung von Schrägbildern an das Thema E-G1 an.
4 UE	Geraden in Parameterform darstellen den Parameter von Geradengleichungen im Sachkontext interpretieren Strecken in Parameterform darstellen			
4 UE	die Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen interpretieren Lagebeziehungen zwischen Geraden untersuchen Schnittpunkte von Geraden berechnen und sie im Sachkontext deuten			
4 UE	das Skalarprodukt geometrisch deuten und es berechnen			
3 UE	mit Hilfe des Skalarprodukts geometrische Objekte und Situationen im Raum untersuchen (Orthogonalität, Winkel- und Längenberechnung)			

Ebenen als Lösungsmengen linearer Gleichungen (Untersuchung geometrischer Objekte) (Q-GK-G2)

<table>
<tr><th>Zeitraum</th><th>Inhaltsbezogene Kompetenzen</th><th>Prozessbezogene Kompetenzen</th><th>Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen</th></tr>
<tr><td>4 UE</td><td>lineare Gleichungssysteme in Matrix-VektorSchreibweise darstellen den Gauß-Algorithmus als Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme beschreiben den Gauß-Algorithmus ohne digitale Werkzeuge auf Gleichungssysteme mit maximal drei Unbekannten, die mit geringem Rechenaufwand lösbar sind, anwenden</td><td rowspan="5">Problemlösen
Erkunden
wählen heuristische Hilfsmittel (z. B. Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren) aus, um die Situation zu erfassen
Lösen
Ideen für mögliche Lösungswege entwickeln Werkzeuge auswählen, die den Lösungsweg unterstützen, heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. [...]Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, […])nutzen, einen Lösungsplan zielgerichtet ausführen,
Reflektieren
verschiedene Lösungswege bezüglich Unterschieden und Gemeinsamkeiten vergleichen, Lösungswege mit Blick auf Richtigkeit und Effizienz beurteilen und optimieren, Ursachen von Fehlern analysieren und reflektieren.

Kommunizieren
Produzieren
die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang verwenden, begründet eine geeignete Darstellungsform auswählen, Arbeitsschritte nachvollziehbar dokumentieren, Ausarbeitungen erstellen und präsentieren
Diskutieren
ausgearbeitete Lösungen hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität vergleichen und beurteilen.

Werkzeuge nutzen
Digitale Werkzeuge nutzen zum
Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen
Darstellen von Objekten im Raum</td><td rowspan="5">Als Einstiegskontext für die Parametrisierung einer Ebene kann eine Dachkonstruktion mit Sparren und Querlatten dienen. Diese bildet ein schiefwinkliges Koordinatensystem in der Ebene. Damit wird die Idee der Koordinatisierung aus dem Thema E-G2 wieder aufgegriffen. Wenn genügend Zeit zur Verfügung steht, können durch Einschränkung des Definitionsbereichs Parallelogramme und Dreiecke beschrieben und auch anspruchsvollere Modellierungsaufgaben gestellt werden, die über die Kompetenzerwartungen des KLP hinausgehen.

In diesem Unterrichtsvorhaben werden Problemlösekompetenzen erworben, indem sich heuristische Strategien bewusst gemacht werden (eine planerische Skizze anfertigen, die gegebenen geometrischen Objekte abstrakt beschreiben, geometrische Hilfsobjekte einführen, bekannte Verfahren zielgerichtet einsetzen und in komplexeren Abläufen kombinieren und unterschiedliche Lösungswege kriteriengestützt vergleichen).

Punktproben sowie die Berechnung von Spurgeraden in den Grundebenen und von Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen führen zunächst noch zu einfachen Gleichungssystemen. Die Achsenabschnitte erlauben eine Darstellung in einem räumlichen Koordinatensystem.

Die Untersuchung von Schattenwürfen eines Mastes auf eine Dachfläche z. B. motiviert eine Fortführung der systematischen Auseinandersetzung (Q-GK-A2) mit linearen Gleichungssystemen, mit der Matrix-Vektor-Schreibweise und mit dem Gauß-Verfahren.

Die Lösungsmengen werden mit dem GTR bestimmt, zentrale Werkzeugkompetenz in diesem Unterrichtsvorhaben ist die Interpretation des angezeigten Lösungsvektors bzw. der reduzierten Matrix. Die Vernetzung der geometrischen Vorstellung (Lagebeziehung) und der algebraischen Formalisierung sollte stets deutlich werden.</td></tr>
<tr><td>3 UE</td><td>die Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen interpretieren</td></tr>
<tr><td>3 UE</td><td>Ebenen in Parameterform darstellen</td></tr>
<tr><td>4 UE</td><td>Lagebeziehungen zwischen Geraden und Ebenen untersuchen
Durchstoßpunkte von Geraden mit Ebenen berechnen und sie im Sachkontext deuten</td></tr>
<tr><td>4 UE</td><td>Durchstoßpunkte von Geraden mit Ebenen berechnen und sie im Sachkontext deuten</td></tr>
</table>

Wahrscheinlichkeit – Statistik: Ein Schlüsselkonzept (Q-GK-S1)

<table>
<tr><th>Zeitraum</th><th>Inhaltsbezogene Kompetenzen</th><th>Prozessbezogene Kompetenzen</th><th>Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen</th></tr>
<tr><td>3 UE</td><td>Lage- und Streumaße von Stichproben untersuchen</td><td rowspan="5">Modellieren
Strukturieren
Mathematisieren
Validieren
zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf konkrete Fragestellungen erfassen und strukturieren, Annahmen treffen und begründet Vereinfachungen einer realen Situation vornehmen,
zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle übersetzen,
mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells erarbeiten,
die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation beziehen,
die Angemessenheit aufgestellter […] Modelle für die Fragestellung beurteilen,
die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen reflektieren.
Problemlösen
Erkunden
Reflektieren
Fragen zu einer gegebenen Problemsituation finden und stellen,
die Plausibilität von Ergebnissen überprüfen, Ergebnisse vor dem Hintergrund der Fragestellung interpretieren
Ursachen von Fehlern analysieren und reflektieren
Kommunizieren
Diskutieren
zu mathematikhaltigen, auch fehlerbehafteten Aussagen und Darstellungen begründet und konstruktiv Stellung nehmen,
Entscheidungen auf der Grundlage fachbezogener Diskussionen herbeiführen
Werkzeuge nutzen
Digitale Werkzeuge nutzen zum
Ermitteln der Kennzahlen statistischer Daten, Variieren der Parameter von Wahrscheinlichkeitsverteilungen
Erstellen der Histogramme von Wahrscheinlichkeitsverteilungen
Berechnen der Kennzahlen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen
Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bei binomialverteilten Zufallsgrößen.</td><td rowspan="5">Anhand verschiedener Glücksspiele wird zunächst der Begriff der Zufallsgröße und der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsverteilung (als Zuordnung von Wahrscheinlichkeiten zu den möglichen Werten, die die Zufallsgröße annimmt) zur Beschreibung von Zufallsexperimenten eingeführt.

Analog zur Betrachtung des Mittelwertes bei empirischen Häufigkeitsverteilungen wird der Erwartungswert einer Zufallsgröße definiert.
Das Grundverständnis von Streumaßen wird durch Rückgriff auf die Erfahrungen der Schülerinnen und Schüler mit Boxplots in der Sekundarstufe I reaktiviert.

Über eingängige Beispiele von Verteilungen mit gleichem Mittelwert aber unterschiedlicher Streuung wird die Definition der Standardabweichung als mittlere quadratische Abweichung im Zusammenhang mit Wahrscheinlichkeitsverteilungen motiviert; anhand gezielter Veränderungen der Verteilung werden die Auswirkungen auf deren Kenngrößen untersucht und interpretiert.

Anschließend werden diese Größen zum Vergleich von Wahrscheinlichkeitsverteilungen und zu einfachen Risikoabschätzungen genutzt.
Der Schwerpunkt bei der Betrachtung von Binomialverteilungen soll auf der Modellierung stochastischer Situationen liegen. Dabei werden zunächst Bernoulliketten in realen Kontexten oder in Spielsituationen betrachtet.

Durch Vergleich mit dem „Ziehen ohne Zurücklegen“ wird geklärt, dass die Anwendung des Modells ‚Bernoullikette’ eine bestimmte Realsituation voraussetzt, d. h. dass die Treffer von Stufe zu Stufe unabhängig voneinander mit konstanter Wahrscheinlichkeit erfolgen.

Zur formalen Herleitung der Binomialverteilung bieten sich das Galtonbrett bzw. seine Simulation und die Betrachtung von MultipleChoice-Tests an.
Eine Visualisierung der Verteilung sowie des Einflusses von Stichprobenumfang n und Trefferwahrscheinlichkeit p erfolgt dabei durch die graphische Darstellung der Verteilung als Histogramm unter Nutzung des GTR.
Hinweis: Der Einsatz des GTR zur Berechnung singulärer sowie kumulierter Wahrscheinlichkeiten ermöglicht den Verzicht auf stochastische Tabellen und eröffnet aus der numerischen
Perspektive den Einsatz von Aufgaben in realitätsnahen Kontexten</td></tr>
<tr><td>5 UE</td><td>den Begriff der Zufallsgröße an geeigneten Beispielen erläutern
den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ von Zufallsgrößen bestimmen und damit prognostische Aussagen treffen</td></tr>
<tr><td>5 UE</td><td>Bernoulliketten zur Beschreibung entsprechender Zufallsexperimente verwenden die Binomialverteilung erklären und damit Wahrscheinlichkeiten berechnen</td></tr>
<tr><td>4 UE</td><td>den Einfluss der Parameter n und p auf Binomialverteilungen und ihre graphische Darstellung beschreiben</td></tr>
<tr><td>5 UE</td><td>Binomialverteilungen und ihre Kenngrößen zur Lösung von Problemstellungen nutzen anhand einer vorgegebenen Entscheidungsregel aus einem Stichprobenergebnis auf die Grundgesamtheit schließen</td></tr>
</table>

Von Übergängen und Prozessen (Q-GK-S2)

Zeitraum	Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen		Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
5 UE	stochastische Prozesse mithilfe von Zustandsvektoren und stochastischen Übergangsmatrizen beschreiben	**Modellieren** *Strukturieren* *Mathematisieren* **Problemlösen** *Erkunden* **Werkzeuge nutzen** *Digitale Werkzeuge nutzen zum*	Annahmen treffen und begründet Vereinfachungen einer realen Situation vornehmen, einem mathematischen Modell verschiedene passende Sachsituationen zuordnen eine gegebene Problemsituation analysieren und strukturieren, heuristische Hilfsmittel auswählen, um die Situation zu erfassen, Muster und Beziehungen erkennen Durchführen von Operationen mit Vektoren und Matrizen und Grenzen mathematischer Hilfsmittel und digitaler ieren und begründen.	*Die Behandlung stochastischer Prozesse sollte genutzt werden, um zentrale Begriffe aus Stochastik (Wahrscheinlichkeit, relative Häufigkeit) und Analysis (Grenzwert) mit Begriffen und Methoden der Linearen Algebra (Vektor, Matrix, lineare Gleichungssysteme) zu vernetzen. Schülerinnen und Schüler modellieren dabei in der Realität komplexe Prozesse, deren langfristige zeitliche Entwicklung untersucht und als Grundlage für Entscheidungen und Maßnahmen genutzt werden kann.* Der Auftrag an Schülerinnen und Schüler, einen stochastischen Prozess graphisch darzustellen, führt in der Regel zur Erstellung eines Baumdiagramms, dessen erste Stufe den Ausgangszustand beschreibt. Im Zusammenhang mit der Interpretation der Pfadregeln als Gleichungssystem können sie daraus die Matrix-Vektor-Darstellung des Prozesses entwickeln. Untersuchungen in unterschiedlichen realen Kontexten führen zur Entwicklung von Begriffen zur Beschreibung von Eigenschaften stochastischer Prozesse (Potenzen der Übergangsmatrix, Grenzmatrix, stabile Verteilung, absorbierender Zustand). Hier bietet sich eine Vernetzung mit der Linearen Algebra hinsichtlich der Betrachtung linearer Gleichungssysteme und ihrer Lösungsmengen an. Eine nicht obligatorische Vertiefungsmöglichkeit besteht darin, Ausgangszustände über ein entsprechendes Gleichungssystem zu ermitteln und zu erfahren, dass der GTR als Hilfsmittel dazu die inverse Matrix bereitstellt.
7 UE	die Matrizenmultiplikation zur Untersuchung stochastischer Prozesse verwenden (Vorhersage nachfolgender Zustände, numerisches Bestimmen sich stabilisierender Zustände).			

Qualifikationsphase Leistungskurs		
<u>*Unterrichtsvorhaben I:*</u> **Thema**: *Eigenschaften von Funktionen (Höhere Ableitungen, Besondere Punkte von Funktionsgraphen, Funktionen bestimmen, Parameter) (Q-LK-A1)* **Zentrale Kompetenzen:** • Modellieren, Problemlösen • Werkzeuge nutzen **Inhaltsfeld**: Funktionen und Analysis (A) **Inhaltlicher Schwerpunkt**: • Fortführung der Differentialrechnung • Funktionen als mathematische Modelle **Zeitbedarf**: LK 30 Std	<u>*Unterrichtsvorhaben II:*</u> **Thema**: *Das Integral, ein Schlüsselkonzept (Von der Änderungsrate zum Bestand, Integral- und Flächeninhalt, Integralfunktion) (QLK-A2)* **Zentrale Kompetenzen:** • Kommunizieren, Argumentieren • Werkzeuge nutzen **Inhaltsfeld**: Funktionen und Analysis (A) **Inhaltliche Schwerpunkte**: • Grundverständnis des Integralbegriffs • Integralrechnung **Zeitbedarf**: LK: 31 Std	<u>*Unterrichtsvorhaben III:*</u> **Thema**: *Exponentialfunktion (natürlicher Logarithmus, Ableitungen) (Q-LK-A3)* **Zentrale Kompetenzen:** • Problemlösen • Modellieren • Werkzeuge nutzen **Inhaltsfeld**: Funktionen und Analysis (A) **Inhaltlicher Schwerpunkt**: • Fortführung der Differentialrechnung **Zeitbedarf**: LK: 26 Std
<u>*Unterrichtsvorhaben IV:*</u> **Thema**: *Untersuchung zusammengesetzter Funktionen (Produktregel, Kettenregel) (Q-LK-A4)* **Zentrale Kompetenzen:** • Argumentieren • Modellieren, Problemlösen • Werkzeuge nutzen **Inhaltsfeld**: Funktionen und Analysis (A) **Inhaltliche Schwerpunkte**: • Funktionen als mathematische Modelle • Fortführung der Differentialrechnung • Integralrechnung **Zeitbedarf**: LK: 32 Std.	<u>*Unterrichtsvorhaben V:*</u> **Thema**: *Geraden und Skalarprodukt (Bewegungen und Schattenwurf) (Q-LK-G1)* **Zentrale Kompetenzen:** • Modellieren • Problemlösen **Inhaltsfeld:** Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G) **Inhaltlicher Schwerpunkt**: • Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte (Geraden) • Skalarprodukt **Zeitbedarf**: LK: 20 Std.	<u>*Unterrichtsvorhaben VI:*</u> **Thema**: *Ebenen als Lösungsmengen linearer Gleichungen (Untersuchung geometrischer Objekte) (Q-LK-G2)* **Zentrale Kompetenzen:** • Argumentieren • Kommunizieren • Werkzeuge nutzen **Inhaltsfeld**: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G) **Inhaltlicher Schwerpunkt**: • Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte • Lineare Gleichungssysteme **Zeitbedarf**: LK: 20 Std

Unterrichtsvorhaben VII: **Thema**: *Abstände und Winkel (Q-LK-G3)* **Zentrale Kompetenzen:** • Problemlösen • Werkzeuge nutzen **Inhaltsfeld** Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G) **Inhaltlicher Schwerpunkt**: • Lagebeziehungen und Abstände • Lineare Gleichungssysteme **Zeitbedarf**: LK: 25 Std.	*Unterrichtsvorhaben VIII-1:* **Thema**: *Wahrscheinlichkeit – Statistik: Ein Schlüsselkonzept (Q-LK-S1)* **Zentrale Kompetenzen:** • Modellieren • Werkzeuge nutzen • Problemlösen **Inhaltsfeld**: Stochastik (S) **Inhaltlicher Schwerpunkt**: • Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen • Binomialverteilung **Zeitbedarf**: GK: 23 Std	*Unterrichtsvorhaben VIII-2:* **Thema**: *Signifikant und relevant? – Testen von Hypothesen (Q-LK-S2)* **Zentrale Kompetenzen:** • Modellieren • Kommunizieren **Inhaltsfeld**: Stochastik (S) **Inhaltlicher Schwerpunkt**: Testen von Hypothesen **Zeitbedarf**: LK: 19 Std.
Unterrichtsvorhaben IX: **Thema**: *Ist die Glocke normal? (Q-LK-S3)* **Zentrale Kompetenzen:** • Modellieren • Problemlösen • Werkzeuge nutzen **Inhaltsfeld**: Stochastik (S) **Inhaltlicher Schwerpunkt**: • Normalverteilung **Zeitbedarf**: LK: 15 Std.		
Summe Qualifikationsphase Leistungskurs : 253 Stunden		

Eigenschaften von Funktionen (Höhere Ableitungen, Besondere Punkte von Funktionsgraphen, Funktionen bestimmen, Parameter) (Q-LK-A1)

<table>
<tr><th>Zeitraum</th><th>Inhaltsbezogene Kompetenzen</th><th>Prozessbezogene Kompetenzen</th><th>Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen</th></tr>
<tr><td>4 UE</td><td>Wiederholung der Grundlagen der Differentialrechnung</td><td rowspan="7">Modellieren
Strukturieren Annahmen treffen und begründet Vereinfachungen einer realen Situation vornehmen,
Mathematisieren zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle übersetzen,
mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells erarbeiten,
die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation beziehen
Validieren die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung beurteilen.

Problemlösen
Erkunden Fragen zu einer gegebenen Problemsituation finden und stellen
einfache und komplexe mathematische Probleme,
analysieren und strukturieren die Problemsituation
erkennen und formulieren,
Lösen Ideen für mögliche Lösungswege entwickeln,
ausgewählte Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung einsetzen,
einschränkende Bedingungen berücksichtigen
einen Lösungsplan zielgerichtet ausführen

Argumentieren
Begründen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen nutzen,
vermehrt logische Strukturen berücksichtigen (notwendige / hinreichende Bedingung, Folgerungen / Äquivalenz, Und- / Oder- Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen),

Werkzeuge nutzen
Digitale Werkzeuge nutzen zum
Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen
Darstellen von Funktionen (grafisch und als ertetabelle),
zielgerichteten Variieren der Parameter von Funktionen,
grafischen Messen von Steigungen
Berechnen der Ableitung einer Funktion an einer Stelle</td><td rowspan="7">Das Aufstellen von Funktionsgleichungen fördert Problemlösestrategien. Es wird deshalb empfohlen, den Lernenden hinreichend Zeit zu geben, u. a. mit Methoden des kooperativen Lernens selbstständig zu Zielfunktionen zu kommen.
An Problemen, die auf quadratische Zielfunktionen führen, sollten auch unterschiedliche Lösungswege aufgezeigt und verglichen werden. Hier bietet es sich außerdem an, Lösungsverfahren auch ohne digitale Hilfsmittel einzuüben.

An mindestens einem Problem entdecken die Schülerinnen und Schüler die Notwendigkeit, Randextrema zu betrachten (z. B. „Glasscheibe“ oder verschiedene Varianten des „Hühnerhofs“).
Ein Verpackungsproblem (Dose oder Milchtüte) wird unter dem Aspekt der Modellvalidierung/Modellkritik untersucht.
Abschließend empfiehlt es sich, ein Problem zu behandeln, das die Schülerinnen und Schüler nur durch systematisches Probieren oder anhand des Funktionsgraphen lösen können: Aufgabe zum „schnellsten Weg“.

Stellen extremaler Steigung eines Funktionsgraphen werden im Rahmen geeigneter Kontexte (z. B. Neuverschuldung und Schulden oder Besucherströme in einen Freizeitpark/zu einer Messe und erforderlicher Personaleinsatz) thematisiert und dabei der zweiten Ableitung eine anschauliche Bedeutung als Zu- und Abnahmerate der Änderungsrate der Funktion verliehen. Die Bestimmung der extremalen Steigung erfolgt zunächst über das Vorzeichenwechselkriterium (an den Nullstellen der zweiten Ableitung).
Anknüpfend an die Einführungsphase (vgl. Thema E-A1) werden an einem Beispiel in einem geeigneten Kontext (z. B. Fotos von Brücken, Gebäuden, Flugbahnen) die Parameter der Scheitelpunktform einer quadratischen Funktion angepasst. Anschließend werden aus gegebenen Punkten Gleichungssysteme für die Parameter der Normalform aufgestellt.

Die Beschreibung von Links- und Rechtskurven über die Zu- und Abnahme der Steigung führt zu einer geometrischen Deutung der zweiten Ableitung einer Funktion als „Krümmung“ des Graphen und</td></tr>
<tr><td>4 UE</td><td>das Krümmungsverhalten des Graphen einer Funktion mit Hilfe der 2. Ableitung beschreiben</td></tr>
<tr><td>3 UE

3 UE</td><td>notwendige Kriterien und Vorzeichenwechselkriterien sowie weitere hinreichende Kriterien zur Bestimmung von Extrem- und Wendepunkten verwenden</td></tr>
<tr><td>4 UE</td><td>Extremalprobleme durch Kombination mit Nebenbedingungen auf Funktionen einer Variablen zurückführen und diese lösen</td></tr>
<tr><td>4 UE</td><td>Parameter einer Funktion mithilfe von Bedingungen, die sich aus dem Kontext ergeben, bestimmen („Steckbriefaufgaben“)</td></tr>
<tr><td>3 UE</td><td>Parameter von Funktionen im Anwendungszusammenhang interpretieren</td></tr>
<tr><td>5 UE</td><td>Parameter von Funktionen im Kontext interpretieren und ihren Einfluss auf Eigenschaften von Funktionenscharen untersuchen</td></tr>
</table>

			zur Betrachtung von Wendepunkten. Als Kontext hierzu können z. B. Trassierungsprobleme gewählt werden. Die simultane Betrachtung beider Ableitungen führt zur Entdeckung eines weiteren hinreichenden Kriteriums für Extrempunkte. Anhand einer Funktion mit Sattelpunkt wird die Grenze dieses hinreichenden Kriteriums entdeckt. Vor- und Nachteile der beiden hinreichenden Kriterien werden abschließend von den Lernenden kritisch bewertet. *Designobjekte oder architektonische Formen können zum Anlass genommen werden, die Funktionsklassen zur Modellierung auf ganzrationale Funktionen 3. oder 4. Grades zu erweitern und über gegebene Punkte, Symmetrieüberlegungen und Bedingungen an die Ableitung Gleichungen zur Bestimmung der Parameter aufzustellen. Hier bieten sich nach einem einführenden Beispiel offene Unterrichtsformen (z. B. Lerntheke) an.* Schülerinnen und Schüler erhalten Gelegenheit, über Grundannahmen der Modellierung (Grad der Funktion, Symmetrie, Lage im Koordinatensystem, Ausschnitt) selbst zu entscheiden, deren Angemessenheit zu reflektieren und ggf. Veränderungen vorzunehmen. Damit nicht bereits zu Beginn algebraische Schwierigkeiten den zentralen Aspekt der Modellierung überlagern, wird empfohlen, den GTR zunächst als Blackbox zum Lösen von Gleichungssystemen und zur graphischen Darstellung der erhaltenen Funktionen im Zusammenhang mit der Validierung zu verwenden und erst im Anschluss die Blackbox „Gleichungslöser“ zu öffnen, das Gaußverfahren zu thematisieren und für einige gut überschaubare Systeme mit drei Unbekannten auch ohne digitale Werkzeuge durchzuführen.

Das Integral, ein Schlüsselkonzept (Von der Änderungsrate zum Bestand, Integral- und Flächeninhalt, Integralfunktion) (Q-LK-A2)

<table>
<tr><th>Zeitraum</th><th>Inhaltsbezogene Kompetenzen</th><th>Prozessbezogene Kompetenzen</th><th>Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen</th></tr>
<tr><td>3 UE</td><td>Produktsummen im Kontext als Rekonstruktion des Gesamtbestandes oder Gesamteffektes einer Größe interpretieren,
die Inhalte von orientierten Flächen im Kontext deuten,
zu einer gegebenen Randfunktion die zugehörige Flächeninhaltsfunktion skizzieren</td><td rowspan="8">Argumentieren
Vermuten
Vermutungen aufstellen,
Vermutungen beispielgebunden unterstützen,
Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur präzisieren,
Begründen
Zusammenhänge zwischen Begriffen herstellen (Ober- / Unterbegriff)
vorgegebene Argumentationen und mathematische Beweise erklären

Kommunizieren
Rezipieren
Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen Texten und Darstellungen, aus authentischen Texten, mathematischen Fachtexten sowie aus Unterrichtsbeiträgen erfassen, strukturieren und formalisieren,
Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren beschreiben,
mathematische Begriffe in theoretischen und in Sachzusammenhängen erläutern. eigene Überlegungen formulieren und eigene Lösungswege beschreiben,
Produzieren
begründet eine geeignete Darstellungsform auswählen,
flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen wechseln,
Arbeitsschritte nachvollziehbar dokumentieren,
Ausarbeitungen erstellen und präsentieren

Werkzeuge nutzen
Messen von Flächeninhalten zwischen Funktionsgraph und Abszisse,
Digitale Werkzeuge nutzen zum
Ermitteln des Wertes eines bestimmten Integrales,
mathematische Hilfsmittel und digitale Werkzeuge zum Erkunden und
Recherchieren, Berechnen und Darstellen nutzen,</td><td rowspan="8">Schülerinnen und Schüler sollen hier (wieder-)entdecken, dass die Bestandsfunktion eine Stammfunktion der Änderungsrate ist. Dazu kann das im vorhergehenden Unterrichtsvorhaben (vgl. Thema QGK-A3) entwickelte numerische Näherungsverfahren auf den Fall angewendet werden, dass für die Änderungsrate ein Funktionsterm gegeben ist.
Die Graphen der Änderungsrate und der Bestandsfunktion können die Schülerinnen und Schüler mit Hilfe einer Tabellenkalkulation und eines Funktionenplotters gewinnen, vergleichen und Beziehungen zwischen diesen herstellen.
Fragen, wie die Genauigkeit der Näherung erhöht werden kann, geben Anlass zu anschaulichen Grenzwertüberlegungen.
Da der Rekonstruktionsprozess auch bei einer abstrakt gegebenen Randfunktion möglich ist, wird für Bestandsfunktionen der Fachbegriff Integralfunktion eingeführt und der Zusammenhang zwischen Rand- und Integralfunktion im Hauptsatz formuliert (ggf. auch im Lehrervortrag).
Die Regeln zur Bildung von Stammfunktionen werden von den Schülerinnen und Schülern durch Rückwärtsanwenden der bekannten Ableitungsregeln selbstständig erarbeitet. (z. B. durch ein sog. Funktionendomino)
In den Anwendungen steht mit dem Hauptsatz neben dem numerischen Verfahren ein alternativer Lösungsweg zur Berechnung von Gesamtbeständen zur Verfügung.
Davon abgegrenzt wird die Berechnung von Flächeninhalten, bei der auch Intervalladditivität und Linearität (bei der Berechnung von Flächen zwischen Kurven) thematisiert werden. Bei der Berechnung der Flächeninhalte zwischen Graphen werden die Schnittstellen in der Regel numerisch mit dem GTR bestimmt.</td></tr>
<tr><td>3 UE</td><td>an geeigneten Beispielen den Übergang von der Produktsumme zum Integral auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs erläutern und vollziehen</td></tr>
<tr><td>4 UE</td><td>geometrisch-anschaulich den Zusammenhang zwischen Änderungsrate und Integralfunktion erläutern
den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung unter Verwendung eines anschaulichen Stetigkeitsbegriffs begründen</td></tr>
<tr><td>4 UE</td><td>Stammfunktionen ganzrationaler Funktionen bestimmen,
die Intervalladditivität und Linearität von Integralen nutzen</td></tr>
<tr><td>5 UE</td><td>den Gesamtbestand oder Gesamteffekt einer Größe aus der Änderungsrate (LK oder der Randfunktion) ermitteln,
Flächeninhalte mit Hilfe von bestimmten (LK: und uneigentlichen) Integralen ermitteln Integrale mithilfe von gegebenen (LK: oder Nachschlagewerken entnommenen) Stammfunktionen und numerisch bestimmen</td></tr>
<tr><td>4 UE</td><td>den Zusammenhang zwischen Änderungsrate und Integralfunktion erläutern</td></tr>
<tr><td>4 UE</td><td>Flächeninhalte mithilfe von bestimmten und uneigentlichen Integralen bestimmen.</td></tr>
<tr><td>4 UE</td><td>Volumina von Körpern, die durch die Rotation um die Abszisse entstehen, mit Hilfe von bestimmten und uneigentlichen Integralen bestimmen</td></tr>
</table>

Exponentialfunktion (natürlicher Logarithmus, Ableitungen) (Q-LK-A3)

Zeitraum	Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
3 UE	Eigenschaften von Exponentialfunktionen beschreiben	**Modellieren** *Strukturieren* *Validieren* Annahmen treffen und begründet Vereinfachungen einer realen Situation vornehmen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation beziehen, die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung beurteilen, aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung verbessern, die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen reflektieren **Problemlösen** *Erkunden* *Lösen* Muster und Beziehungen erkennen, Informationen recherchieren *ausgewählte Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung einsetzen,* *Werkzeuge auswählen, die den Lösungsweg unterstützen,* *geeignete Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren zur Problemlösung auswählen* einschränkende Bedingungen berücksichtigen **Argumentieren** *Vermuten* *Begründen* *Beurteilen* Vermutungen aufstellen und mithilfe von Fachbegriffen präzisieren math. Regeln und Sätze für Begründungen nutzen überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können, Argumentationsketten hinsichtlich ihrer Reichweite und Übertragbarkeit beurteilen **Werkzeuge nutzen** *Digitale Werkzeuge nutzen zum* Erkunden Darstellen von Funktionen (graphisch und als Wertetabelle), grafischen Messen von Steigungen, Berechnen der Ableitung einer Funktion an einer Stelle Die Möglichkeiten und Grenzen mathematischer Hilfsmittel und digitaler Werkzeuge reflektieren und begründen	*Zu Beginn des Unterrichtsvorhabens sollte eine Auffrischung der bereits in der Einführungsphase erworbenen Kompetenzen durch eine arbeitsteilige Untersuchung verschiedener Kontexte z. B. in Gruppenarbeit mit Präsentation stehen (Wachstum und Zerfall).* Im Anschluss werden die Eigenschaften einer allgemeinen Exponentialfunktion zusammengestellt. Der GTR unterstützt dabei die Klärung der Bedeutung der verschiedenen Parameter und die Veränderungen durch Transformationen. Die Frage nach der Ableitung an einer Stelle führt zu einer vertiefenden Betrachtung des Übergangs von der durchschnittlichen zur momentanen Änderungsrate. In einem Tabellenkalkulationsblatt wird für immer kleinere h das Verhalten des Differenzenquotienten beobachtet. Umgekehrt suchen die Lernenden zu einem gegebenen Ableitungswert die zugehörige Stelle. *Dazu könnten sie eine Wertetabelle des Differenzenquotienten aufstellen, die sie immer weiter verfeinern oder in der Grafik ihres GTR experimentieren, indem sie Tangenten an verschiedenen Stellen an die Funktion legen. Mit diesem Ansatz kann in einem DGS auch der Graph der Ableitungsfunktion als Ortskurve gewonnen werden.* Abschließend wird noch die Basis variiert. Dabei ergibt sich quasi automatisch die Frage, für welche Basis Funktion und Ableitungsfunktion übereinstimmen.
5 UE	die Ableitung der natürlichen Exponentialfunktion bilden die besondere Eigenschaft der natürlichen Exponentialfunktion beschreiben und begründen die Ableitung mithilfe der Approximation durch lineare Funktionen deuten		
4 UE	die Ableitung von Exponentialfunktionen mit beliebiger Basis bilden in einfachen Fällen zusammengesetzte Funktionen und deren Ableitung bilden		
4 UE	Wachstums- und Zerfallsvorgänge mit Hilfe funktionaler Ansätze untersuchen		
5 UE	Exponentialfunktionen zur Beschreibung von Wachstums- und Zerfallsvorgängen verwenden und die Qualität der Modellierung exemplarisch mit begrenztem Wachstum vergleichen		
5 UE	die natürliche Logarithmusfunktion als Umkehrfunktion der natürlichen Exponentialfunktion nutzen die Ableitung der natürlichen Logarithmusfunktion bilden		

Untersuchung zusammengesetzter Funktionen (Produktregel, Kettenregel) (Q-LK-A4)

Zeitraum	Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
2 UE	in einfachen Fällen zusammengesetzte Funktionen bilden (Summe, Produkt, Verkettung)	**Problemlösen** *Lösen* heuristische Strategien und Prinzipien nutzen, Werkzeuge auswählen, die den Lösungsweg unterstützen, geeignete Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren zur Problemlösung auswählen **Argumentieren** *Vermuten* Vermutungen aufstellen, beispielgebunden unterstützen und mithilfe von Fachbegriffen präzisieren, *Begründen* math. Regeln und Sätze für Begründungen nutzen sowie Argumente zu Argumentationsketten verknüpfen, verschiedene Argumentationsstrategien nutzen *Beurteilen* lückenhafte Argumentationsketten erkennen und vervollständigen, fehlerhafte Argumentationsketten erkennen und korrigieren **Kommunizieren** *Produzieren* eigene Überlegungen formulieren und eigene Lösungswege beschreiben, Fachsprache und fachspezifische Notation verwenden, **Werkzeuge nutzen** *Digitale Werkzeuge nutzen zum* zielgerichteten Variieren der Parameter von Funktionen, grafischen Messen von Steigungen Berechnen der Ableitung einer Funktion an einer Stelle Möglichkeiten und Grenzen mathematischer Hilfsmittel und digitaler Werkzeuge reflektieren und begründen.	Als Beispiel für eine Summenfunktion eignet sich die Modellierung einer Kettenlinie. An mindestens einem Beispiel wird auch ein beschränktes Wachstum untersucht. An Beispielen von Prozessen, bei denen das Wachstum erst zu- und dann wieder abnimmt (Medikamente, Fieber, Pflanzen), wird eine Modellierung durch Produkte von ganzrationalen Funktionen und Exponentialfunktionen einschließlich deren Verhalten für betragsgroße Argumente erarbeitet. Auch in diesen Kontexten ergeben sich Fragen, die erfordern, dass aus der Wachstumsgeschwindigkeit auf den Gesamteffekt geschlossen wird. Weitere Kontexte bieten Anlass zu komplexen Modellierungen mit Funktionen anderer Funktionenklassen, insbesondere unter Berücksichtigung von Parametern, für die Einschränkungen des Definitionsbereiches oder Fallunterscheidungen vorgenommen werden müssen. Vernetzungsmöglichkeiten mit der Stochastik sollten aufgegriffen werden (z. B. Gaußsche Glockenkurve – sofern zu diesem Zeitpunkt bereits behandelt).
4 UE	die Produktregel auf Verknüpfungen von ganzrationalen Funktionen und Exponentialfunktionen anwenden die Produktregel zum Ableiten von Funktionen anwenden		
7 UE	die Kettenregel auf Verknüpfungen der natürlichen Exponentialfunktion mit linearen Funktionen anwenden, die Ableitungen von Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten bilden die Ableitungen von Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten bilden, die Produkt- und Kettenregel zum Ableiten von Funktionen anwenden		
7 UE	verwenden notwendige Kriterien und Vorzeichenwechselkriterien sowie weitere hinreichende Kriterien zur Bestimmung von Extrem- und Wendepunkten Den Einfluss von Parametern auf Eigenschaften von Funktionenscharen untersuchen		
4 UE	Parameter von Funktionen im Kontext interpretieren		
3 UE	Eigenschaften von zusammengesetzten Funktionen (Summe, Produkt, Verkettung) argumentativ auf deren Bestandteile zurückführen		
5 UE	Eigenschaften von zusammengesetzten Funktionen (Summe, Produkt, Verkettung) argumentativ auf deren Bestandteile zurückführen die natürliche Logarithmusfunktion als Stammfunktion der Funktion f(x) = 1/x nutzen		

Geraden und Skalarprodukt (Bewegungen als Schattenwurf) (Q-LK-G1)

<table>
<tr><th>Zeitraum</th><th>Inhaltsbezogene Kompetenzen</th><th>Prozessbezogene Kompetenzen</th><th>Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen</th></tr>
<tr><td>5 UE</td><td>Wiederholung: Punkte im Raum, Vektoren, Rechnen mit Vektoren</td><td rowspan="5">Modellieren
Strukturieren
zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung erfassen und strukturieren, Annahmen treffen und begründet Vereinfachungen einer realen Situation vornehmen,
Mathematisieren
zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle übersetzen, mithilfe math. Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des math. Modells erarbeiten,
Validieren
die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation beziehen,
die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung beurteilen,
aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung verbessern

Werkzeuge nutzen
Geodreiecke, geometrische Modelle und dynamische Geometrie-Software nutzen;
Digitale Werkzeuge nutzen zum
grafischen Darstellen von Ortsvektoren, Vektorsummen und Geraden,
Darstellen von Objekten im Raum</td><td rowspan="5">Lineare Bewegungen werden z. B. im Kontext von Flugbahnen (Kondensstreifen) durch Startpunkt, Zeitparameter und Geschwindigkeitsvektor beschrieben und dynamisch mit DGS dargestellt. Dabei sollten Modellierungsfragen (reale Geschwindigkeiten, Größe der Flugobjekte, Flugebenen) einbezogen werden.

Eine Vertiefung kann darin bestehen, den Betrag der Geschwindigkeit zu variieren. In jedem Fall soll der Unterschied zwischen einer Geraden als Punktmenge (z. B. die Flugbahn) und einer Parametrisierung dieser Punktmenge als Funktion (von der Parametermenge in den Raum) herausgearbeitet werden.

Ergänzend zum dynamischen Zugang wird die rein geometrische Frage aufgeworfen, wie eine Gerade durch zwei Punkte zu beschreiben ist. Hierbei wird herausgearbeitet, dass zwischen unterschiedlichen Parametrisierungen einer Geraden gewechselt werden kann. Punktproben sowie die Berechnung von Schnittpunkten mit den Grundebenen sollen auch hilfsmittelfrei durchgeführt werden. Die Darstellung in räumlichen Koordinatensystemen sollte hinreichend geübt werden.

Auf dieser Grundlage können z. B. Schattenwürfe von Gebäuden in Parallel- und Zentralprojektion auf eine der Grundebenen berechnet und zeichnerisch dargestellt werden. Der Einsatz der DGS bietet hier die zusätzliche Möglichkeit, dass der Ort der Strahlenquelle variiert werden kann. Inhaltlich schließt die Behandlung von Schrägbildern an das Thema E-G1 an.</td></tr>
<tr><td>4 UE</td><td>Geraden in Parameterform darstellen den Parameter von Geradengleichungen im Sachkontext interpretieren
Strecken in Parameterform darstellen</td></tr>
<tr><td>4 UE</td><td>die Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen interpretieren
Lagebeziehungen zwischen Geraden untersuchen
Schnittpunkte von Geraden berechnen und sie im Sachkontext deuten</td></tr>
<tr><td>4 UE</td><td>das Skalarprodukt geometrisch deuten und es berechnen</td></tr>
<tr><td>3 UE</td><td>mit Hilfe des Skalarprodukts geometrische Objekte und Situationen im Raum untersuchen (Orthogonalität, Winkel- und Längenberechnung)</td></tr>
</table>

Ebenen als Lösungsmengen linearer Gleichungen (Untersuchung geometrischer Objekte) (Q-LK-G2)

Zeitraum	Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
5 UE	lineare Gleichungssysteme in Matrix-VektorSchreibweise darstellen den Gauß-Algorithmus als Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme beschreiben den Gauß-Algorithmus ohne digitale Werkzeuge auf Gleichungssysteme mit maximal drei Unbekannten, die mit geringem Rechenaufwand lösbar sind, anwenden	**Problemlösen** *Erkunden*: wählen heuristische Hilfsmittel (z. B. Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren) aus, um die Situation zu erfassen *Lösen*: Ideen für mögliche Lösungswege entwickeln Werkzeuge auswählen, die den Lösungsweg unterstützen, heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. [...]Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, […])nutzen, einen Lösungsplan zielgerichtet ausführen, verschiedene Lösungswege bezüglich Unterschieden und Gemeinsamkeiten vergleichen, *Reflektieren*: Lösungswege mit Blick auf Richtigkeit und Effizienz beurteilen und optimieren, Ursachen von Fehlern analysieren und reflektieren. **Kommunizieren** *Produzieren*: die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang verwenden, begründet eine geeignete Darstellungsform auswählen, Arbeitsschritte nachvollziehbar dokumentieren, Ausarbeitungen erstellen und präsentieren *Diskutieren*: ausgearbeitete Lösungen hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität vergleichen und beurteilen. **Werkzeuge nutzen** *Digitale Werkzeuge nutzen zum* Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen Darstellen von Objekten im Raum	Als Einstiegskontext für die Parametrisierung einer Ebene kann eine Dachkonstruktion mit Sparren und Querlatten dienen. Diese bildet ein schiefwinkliges Koordinatensystem in der Ebene. Damit wird die Idee der Koordinatisierung aus dem Thema E-G2 wieder aufgegriffen. *Wenn genügend Zeit zur Verfügung steht, können durch Einschränkung des Definitionsbereichs Parallelogramme und Dreiecke beschrieben und auch anspruchsvollere Modellierungsaufgaben gestellt werden, die über die Kompetenzerwartungen des KLP hinausgehen.* In diesem Unterrichtsvorhaben werden Problemlösekompetenzen erworben, indem sich heuristische Strategien bewusst gemacht werden (eine planerische Skizze anfertigen, die gegebenen geometrischen Objekte abstrakt beschreiben, geometrische Hilfsobjekte einführen, bekannte Verfahren zielgerichtet einsetzen und in komplexeren Abläufen kombinieren und unterschiedliche Lösungswege kriteriengestützt vergleichen). Punktproben sowie die Berechnung von Spurgeraden in den Grundebenen und von Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen führen zunächst noch zu einfachen Gleichungssystemen. Die Achsenabschnitte erlauben eine Darstellung in einem räumlichen Koordinatensystem. Die Untersuchung von Schattenwürfen eines Mastes auf eine Dachfläche z. B. motiviert eine Fortführung der systematischen Auseinandersetzung (Q-GK-A2) mit linearen Gleichungssystemen, mit der Matrix-Vektor-Schreibweise und mit dem Gauß-Verfahren. Die Lösungsmengen werden mit dem GTR bestimmt, zentrale Werkzeugkompetenz in diesem Unterrichtsvorhaben ist die Interpretation des angezeigten Lösungsvektors bzw. der reduzierten Matrix. Die Vernetzung der geometrischen Vorstellung (Lagebeziehung) und der algebraischen Formalisierung sollte stets deutlich werden
3 UE	die Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen interpretieren		
3 UE	Ebenen in Parameterform darstellen		
5 UE	Lagebeziehungen zwischen Geraden und Ebenen untersuchen Durchstoßpunkte von Geraden mit Ebenen berechnen und sie im Sachkontext deuten		
4 UE	Durchstoßpunkte von Geraden mit Ebenen berechnen und sie im Sachkontext deuten geradlinig begrenzte Punktmengen in Parameterform darstellen		

Abstände und Winkel (Q-LK-G3)

Zeitraum	Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen		
4 UE	Ebenen in Koordinatenform darstellen Ebenen in Normalenform darstellen und diese zur Orientierung im Raum nutzen	**Problemlösen** *Erkunden* *Lösen* *Reflektieren*	wählen heuristische Hilfsmittel (z. B. Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren) aus, um die Situation zu erfassen Ideen für mögliche Lösungswege entwickeln Werkzeuge auswählen, die den Lösungsweg unterstützen, heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. [...]Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, […])nutzen, einen Lösungsplan zielgerichtet ausführen, verschiedene Lösungswege bezüglich Unterschieden und Gemeinsamkeiten vergleichen, Lösungswege mit Blick auf Richtigkeit und Effizienz beurteilen und optimieren, Ursachen von Fehlern analysieren und reflektieren.	Das Skalarprodukt wird zunächst als Indikator für Orthogonalität aus einer Anwendung des Satzes von Pythagoras entwickelt. Durch eine Zerlegung in parallele und orthogonale Komponenten wird der geometrische Aspekt der Projektion betont. Dies wird zur Einführung des Winkels über den Kosinus genutzt (alternativ zu einer Herleitung aus dem Kosinussatz). *Eine weitere Bedeutung des Skalarproduktes kann mit den gleichen Überlegungen am Beispiel der physikalischen Arbeit erschlossen werden.* *Bei hinreichend zur Verfügung stehender Zeit kann in Anwendungskontexten (z. B. Vorbeiflug eines Flugzeugs an einem Hindernis unter Einhaltung eines Sicherheitsabstandes, vgl. Q-GK-G3) entdeckt werden, wie der Abstand eines Punktes von einer Geraden u. a. als Streckenlänge über die Bestimmung eines Lotfußpunktes ermittelt werden kann. Bei dieser Problemstellung sollten unterschiedliche Lösungswege zugelassen und verglichen werden.* Tetraeder, Pyramiden, Würfel, Prismen und Oktaeder bieten vielfältige Anlässe für (im Sinne des Problemlösens offen angelegte) exemplarische geometrische Untersuchungen und können auf reale Objekte (z. B. Gebäude) bezogen werden. *Dabei kann z. B. der Nachweis von Dreiecks- bzw. Viereckstypen (anknüpfend an das Thema E-G2) wieder aufgenommen werden.* Wo möglich, werden auch elementargeometrische Lösungswege als Alternative aufgezeigt.
4 UE	Ebenen in Normalenform darstellen und diese zur Orientierung im Raum nutzen			
4 UE	Abstände zwischen Punkt und Ebene			
4 UE	Abstände zwischen Punkt und Gerade	**Kommunizieren** *Produzieren* *Diskutieren*	die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang verwenden, begründet eine geeignete Darstellungsform auswählen, Arbeitsschritte nachvollziehbar dokumentieren, Ausarbeitungen erstellen und präsentieren ausgearbeitete Lösungen hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität vergleichen und beurteilen.	
4 UE	Abstände zwischen windschiefen Geraden			
5 UE	mit Hilfe des Skalarprodukts geometrische Objekte und Situationen im Raum untersuchen (Orthogonalität, Winkel- und Längenberechnung)	**Werkzeuge nutzen** *Digitale Werkzeuge nutzen zum*	Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen Darstellen von Objekten im Raum	

Wahrscheinlichkeit – Statistik: Ein Schlüsselkonzept (Q-LK-S1)

Zeitraum	Inhaltsbezogene Kompetenzen			
3 UE	untersuchen Lage- und Streumaße von Stichproben,	**Modellieren** *Strukturieren* *Mathematisieren* *Validieren* **Problemlösen** *Erkunden* *Reflektieren* **Kommunizieren** *Diskutieren* **Werkzeuge nutzen** *Digitale Werkzeuge nutzen zum*	zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf konkrete Fragestellungen erfassen und strukturieren, Annahmen treffen und begründet Vereinfachungen einer realen Situation vornehmen, zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle übersetzen, mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells erarbeiten, die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation beziehen, die Angemessenheit aufgestellter […] Modelle für die Fragestellung beurteilen, die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen reflektieren. Fragen zu einer gegebenen Problemsituation finden und stellen, die Plausibilität von Ergebnissen überprüfen, Ergebnisse vor dem Hintergrund der Fragestellung interpretieren Ursachen von Fehlern analysieren und reflektieren zu mathematikhaltigen, auch fehlerbehafteten Aussagen und Darstellungen begründet und konstruktiv Stellung nehmen, Entscheidungen auf der Grundlage fachbezogener Diskussionen erbeiführen Ermitteln der Kennzahlen statistischer Daten, Variieren der Parameter von Wahrscheinlichkeitsverteilungen Erstellen der Histogramme von Wahrscheinlichkeitsverteilungen Berechnen der Kennzahlen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bei binomialverteilten Zufallsgrößen.	Anhand verschiedener Glücksspiele wird zunächst der Begriff der Zufallsgröße und der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsverteilung (als Zuordnung von Wahrscheinlichkeiten zu den möglichen Werten, die die Zufallsgröße annimmt) zur Beschreibung von Zufallsexperimenten eingeführt. Analog zur Betrachtung des Mittelwertes bei empirischen Häufigkeitsverteilungen wird der Erwartungswert einer Zufallsgröße definiert. Das Grundverständnis von Streumaßen wird durch Rückgriff auf die Erfahrungen der Schülerinnen und Schüler mit Boxplots in der Sekundarstufe I reaktiviert. Über eingängige Beispiele von Verteilungen mit gleichem Mittelwert aber unterschiedlicher Streuung wird die Definition der Standardabweichung als mittlere quadratische Abweichung im Zusammenhang mit Wahrscheinlichkeitsverteilungen motiviert; anhand gezielter Veränderungen der Verteilung werden die Auswirkungen auf deren Kenngrößen untersucht und interpretiert. Anschließend werden diese Größen zum Vergleich von Wahrscheinlichkeitsverteilungen und zu einfachen Risikoabschätzungen genutzt. Der Schwerpunkt bei der Betrachtung von Binomialverteilungen soll auf der Modellierung stochastischer Situationen liegen. Dabei werden zunächst Bernoulliketten in realen Kontexten oder in Spielsituationen betrachtet. Durch Vergleich mit dem „Ziehen ohne Zurücklegen“ wird geklärt, dass die Anwendung des Modells ‚Bernoullikette’ eine bestimmte Realsituation voraussetzt, d. h. dass die Treffer von Stufe zu Stufe unabhängig voneinander mit konstanter Wahrscheinlichkeit erfolgen. Zur formalen Herleitung der Binomialverteilung bieten sich das Galtonbrett bzw. seine Simulation und die Betrachtung von MultipleChoice-Tests an. Eine Visualisierung der Verteilung sowie des Einflusses von Stichprobenumfang *n* und Trefferwahrscheinlichkeit *p* erfolgt dabei durch die graphische Darstellung der Verteilung als Histogramm unter Nutzung des GTR. *Hinweis: Der Einsatz des GTR zur Berechnung singulärer sowie kumulierter Wahrscheinlichkeiten ermöglicht den Verzicht auf stochastische Tabellen und eröffnet aus der numerischen Perspektive den Einsatz von Aufgaben in realitätsnahen Kontexten.*
5 UE	den Begriff der Zufallsgröße an geeigneten Beispielen erläutern den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ von Zufallsgrößen bestimmen und damit prognostische Aussagen treffen			
5 UE	Bernoulliketten zur Beschreibung entsprechender Zufallsexperimente verwenden die Binomialverteilung erklären und damit Wahrscheinlichkeiten berechnen die kombinatorische Bedeutung der Binomialkoeffizienten erklären			
5 UE	den Einfluss der Parameter n und p auf Binomialverteilungen und ihre graphische Darstellung beschreiben die Sigma-Regeln für prognostische Aussagen nutzen			
5 UE	Binomialverteilungen und ihre Kenngrößen zur Lösung von Problemstellungen nutzen anhand einer vorgegebenen Entscheidungsregel aus einem Stichprobenergebnis auf die Grundgesamtheit schließen			

Signifikant und relevant – Testen von Hypothesen (Q-LK-S2)

Zeitraum	Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen		
5 UE	anhand einer vorgegebenen Entscheidungsregel aus einem Stichprobenergebnis auf die Grundgesamtheit schließen	**Modellieren** *Strukturieren* *Mathematisieren* *Validieren*	zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf konkrete Fragestellungen erfassen und strukturieren, Annahmen treffen und begründet Vereinfachungen einer realen Situation vornehmen, zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle übersetzen, mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells erarbeiten, die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation beziehen, die Angemessenheit aufgestellter […] Modelle für die Fragestellung beurteilen, die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen reflektieren.	Zentral ist das Verständnis der Idee des Hypothesentests, d. h. mit Hilfe eines mathematischen Instrumentariums einzuschätzen, ob Beobachtungen auf den Zufall zurückzuführen sind oder nicht. Ziel ist es, die Wahrscheinlichkeit von Fehlentscheidungen möglichst klein zu halten. Die Logik des Tests soll dabei an datengestützten gesellschaftlich relevanten Fragestellungen, z. B. Häufungen von Krankheitsfällen in bestimmten Regionen oder alltäglichen empirischen Phänomenen (z. B. Umfrageergebnisse aus dem Lokalteil der Zeitung) entwickelt werden, sie wird abschließend in einem ‚Testturm' visualisiert. Im Rahmen eines realitätsnahen Kontextes werden folgende Fragen diskutiert: - Welche Hypothesen werden aufgestellt? Wer formuliert diese mit welcher Interessenlage? - Welche Fehlentscheidungen treten beim Testen auf? Welche Konsequenzen haben sie? Durch Untersuchung und Variation gegebener Entscheidungsregeln werden die Bedeutung des Signifikanzniveaus und der Wahrscheinlichkeit des Auftretens von Fehlentscheidungen 1. und 2. Art zur Beurteilung des Testverfahrens erarbeitet.
5 UE	Hypothesentests bezogen auf den Sachkontext und das Erkenntnisinteresse interpretieren			
5 UE	Hypothesentests bezogen auf den Sachkontext und das Erkenntnisinteresse interpretieren	**Problemlösen** *Erkunden* *Reflektieren*		
4 UE	Fehler 1. und 2. Art beschreiben und beurteilen	**Kommunizieren** *Diskutieren*	Fragen zu einer gegebenen Problemsituation finden und stellen, die Plausibilität von Ergebnissen überprüfen, Ergebnisse vor dem Hintergrund der Fragestellung interpretieren Ursachen von Fehlern analysieren und reflektieren	
		Werkzeuge nutzen *Digitale Werkzeuge nutzen zum*	zu mathematikhaltigen, auch fehlerbehafteten Aussagen und Darstellungen begründet und konstruktiv Stellung nehmen, Entscheidungen auf der Grundlage fachbezogener Diskussionen herbeiführen Generieren von Zufallszahlen, Ermitteln der Kennzahlen statistischer Daten, Erstellen der Histogramme von Wahrscheinlichkeitsverteilungen Berechnen der Kennzahlen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen	

Ist die Glocke normal? (Q-LK-S3)

Zeitraum	Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen		
4 UE	diskrete und stetige Zufallsgrößen unterscheiden und die Verteilungsfunktion als Integralfunktion deuten	**Modellieren** *Strukturieren* *Mathematisieren*	zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf konkrete Fragestellungen erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle übersetzen, mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells erarbeiten.	Normalverteilungen sind in der Stochastik bedeutsam, weil sich die Summenverteilung von genügend vielen unabhängigen Zufallsvariablen häufig durch eine Normalverteilung approximieren lässt. Dementsprechend beschließt die Fachkonferenz den Einstieg in dieses Unterrichtsvorhaben über die Untersuchung von Summenverteilungen. Mit einer Tabellenkalkulation werden die Augensummen von zwei, drei, vier… Würfeln simuliert, wobei in der grafischen Darstellung die Glockenform zunehmend deutlicher wird. *Ergänzung für leistungsfähige Kurse:* Gut geeignet ist auch die Simulation von Stichprobenmittelwerten aus einer (gleichverteilten) Grundgesamtheit. Ergebnisse von Schulleistungstests oder Intelligenztests werden erst vergleichbar, wenn man sie hinsichtlich Mittelwert und Streuung normiert, was ein Anlass dafür ist, mit den Parametern μ und σ zu experimentieren. Auch Untersuchungen zu Mess- und Schätzfehlern bieten einen anschaulichen, ggf. handlungsorientierten Zugang. Da auf dem GTR die Normalverteilung einprogrammiert ist, spielt die Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung (Satz von de Moivre-Laplace) für die Anwendungsbeispiele im Unterricht eine untergeordnete Rolle. Dennoch sollte bei genügender Zeit deren Herleitung als Vertiefung der Integralrechnung im Leistungskurs thematisiert werden, da der Übergang von der diskreten zur stetigen Verteilung in Analogie zur Approximation von Flächen durch Produktsummen nachvollzogen werden kann (vgl. QLK-A3). Die Visualisierung erfolgt mithilfe des GTR. Theoretisch ist von Interesse, dass es sich bei der Gaußschen Glockenkurve um den Graphen einer Randfunktion handelt, zu deren Stammfunktion (Gaußsche Integralfunktion) kein Term angegeben werden kann.
5 UE	den Einfluss der Parameter μ und σ auf die Normalverteilung beschreiben und die graphische Darstellung ihrer Dichtefunktion (Gauß'sche Glockenkurve)	**Problemlösen** *Erkunden* *Reflektieren*	Fragen zu einer gegebenen Problemsituation finden und stellen die Plausibilität von Ergebnissen überprüfen, Ergebnisse vor dem Hintergrund der Fragestellung interpretieren Ursachen von Fehlern analysieren und reflektieren	
6 UE	stochastische Situationen untersuchen, die zu annähernd normalverteilten Zufallsgrößen führen	**Kommunizieren** *Diskutieren*	zu mathematikhaltigen, auch fehlerbehafteten Aussagen und Darstellungen begründet und konstruktiv Stellung nehmen, Entscheidungen auf der Grundlage fachbezogener Diskussionen herbeiführen **en**	
		Werkzeuge nutzen Digitale Werkzeuge nutzen zum	Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bei normalverteilten Zufallsgrößen.	

Von Übergängen und Prozessen (Q-LK-S4)

Zeitraum	Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen		Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
5 UE	stochastische Prozesse mithilfe von Zustandsvektoren und stochastischen Übergangsmatrizen beschreiben	**Modellieren** *Strukturieren* *Mathematisieren*	Annahmen treffen und begründet Vereinfachungen einer realen Situation vornehmen, einem mathematischen Modell verschiedene passende Sachsituationen zuordnen	*Die Behandlung stochastischer Prozesse sollte genutzt werden, um zentrale Begriffe aus Stochastik (Wahrscheinlichkeit, relative Häufigkeit) und Analysis (Grenzwert) mit Begriffen und Methoden der Linearen Algebra (Vektor, Matrix, lineare Gleichungssysteme) zu vernetzen. Schülerinnen und Schüler modellieren dabei in der Realität komplexe Prozesse, deren langfristige zeitliche Entwicklung untersucht und als Grundlage für Entscheidungen und Maßnahmen genutzt werden kann.* Der Auftrag an Schülerinnen und Schüler, einen stochastischen Prozess graphisch darzustellen, führt in der Regel zur Erstellung eines Baumdiagramms, dessen erste Stufe den Ausgangszustand beschreibt. Im Zusammenhang mit der Interpretation der Pfadregeln als Gleichungssystem können sie daraus die Matrix-Vektor-Darstellung des Prozesses entwickeln. Untersuchungen in unterschiedlichen realen Kontexten führen zur Entwicklung von Begriffen zur Beschreibung von Eigenschaften stochastischer Prozesse (Potenzen der Übergangsmatrix, Grenzmatrix, stabile Verteilung, absorbierender Zustand). Hier bietet sich eine Vernetzung mit der Linearen Algebra hinsichtlich der Betrachtung linearer Gleichungssysteme und ihrer Lösungsmengen an. Eine nicht obligatorische Vertiefungsmöglichkeit besteht darin, Ausgangszustände über ein entsprechendes Gleichungssystem zu ermitteln und zu erfahren, dass der GTR als Hilfsmittel dazu die inverse Matrix bereitstellt.
7 UE	die Matrizenmultiplikation zur Untersuchung stochastischer Prozesse verwenden (Vorhersage nachfolgender Zustände, numerisches Bestimmen sich stabilisierender Zustände).	**Problemlösen** *Erkunden* **Werkzeuge nutzen** *Digitale Werkzeuge nutzen zum*	eine gegebene Problemsituation analysieren und strukturieren, heuristische Hilfsmittel auswählen, um die Situation zu erfassen, Muster und Beziehungen erkennen Durchführen von Operationen mit Vektoren und Matrizen Die Möglichkeiten und Grenzen mathematischer Hilfsmittel und digitaler Werkzeuge reflektieren und begründen.	